FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

MATEMATIKA 1

Garant předmětu:
Prof. RNDr. Josef DIBLÍK, DrSc. (do 31.8.2002)
Prof. RNDr. Jan CHVALINA, DrSc. (od 1.9.2002)

Autoři textu:
Prof. RNDr. Josef DIBLÍK, DrSc. (hlavní autor)
Doc. RNDr. Jaromír BAŠTINEC, CSc.
Mgr. Helena DURNOVÁ, Ph.D.
Mgr. Martin ŘEZÁČ

Obsah

Seznam obrázků

Seznam tabulek

0.1 Označení

$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{Q}$	množina racionálních čísel
$\mathbb{I}$	množina iracionálních čísel
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel
$P_n(x)$	polynom n-tého stupně proměnné x
$A_{m,n}$	matice typu m, n (s m řádky a n sloupci)
$A = (a_{ij})$	matice s prvky a_{ij}
I	jednotková matice
$\mathcal{O}$	nulová matice
$det\, A = \|A\|$	determinant matice A
A^{-1}	matice inverzní k matici A
$adj\, A$	matice adjungovaná k matici A
A_{ks}	algebraický doplněk prvku a_{ks}
$hod\,(A)$	hodnost matice A
$(\mathbb{R}^n, +, .)$	vektorový prostor všech uspořádaných n-tic
$\dim P$	dimenze prostoru P.
$a \bullet a$	skalární součin vektorů a, b
$\\|x\\|$	norma vektoru x
$\square$	konec důkazu
$\langle A \rangle$	lineární obal množiny A
$M_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}}$	matice přechodu od báze $\mathcal{A}$ k bázi $\mathcal{A}'$
$a \perp b$	vektor a je ortogonální na vektor b
$f\|_V = g$	zúžení funkce na podmnožinu
$A \times B$	kartézský součim množin A, B
$a \times b$	vektorový součin vektorů a, b
$[a, b, c]$	smíšený součin vektorů a, b, c

Kapitola 1

Základní pojmy matematické logiky a teorie množin

1.1 Základní matematické pojmy

1. Množina

V matematice nazýváme jakýkoliv soubor či systém objektů množina. Můžeme například mluvit o množině všech stromů na pasece, o množině hus pasoucích se na louce či o množině všech celých čísel.

Značí-li A množinu všech předmětů a x je jeden z těchto předmětů, říkáme, že x je prvkem množiny A (x patří do A) a píšeme $x \in A$.

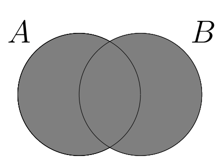
Není-li y prvkem A, píšeme $y \notin A$ nebo $y \bar{\in} A$.

Jestliže pro libovolné x má vztah $x \in A$ vždy za následek vztah $x \in B$, potom říkáme, že množina A je obsažena v B a nazýváme ji podmnožinou množiny B. V tom případě píšeme $A \subset B$. Relace $A = B$ je speciálním případem relace $A \subset B$. Platí-li $A \subset B$ a také $B \subset A$, pak píšeme $A = B$.

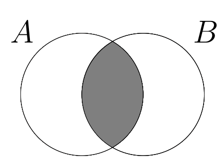
Je nutné zavést také pojem prázdné množiny neobsahující žádné prvky. Tuto množinu značíme $\emptyset$.

Definujeme:

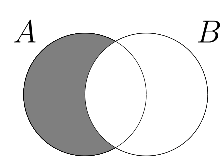
- Sjednocení (součet) množin A a B: $A \cup B \quad (A + B)$,
- Rozdíl množin A a B: $A \setminus B \quad (A - B)$,
- Průnik (součin) množin A a B: $A \cap B \quad (AB)$.



Obrázek 1.1.1: $A \bigcup B$



Obrázek 1.1.2: $A \bigcap B$



Obrázek 1.1.3: $A \setminus B$

1.2 Elementy matematické logiky

1. Kvantifikátory

Za základní kvantifikátory považujeme následující dva:

- Existenční kvanitfikátor: $\exists$ (existuje); např. $\exists x \in \mathbb{R} : x + 2 = 5$
- Obecný kvantifikátor: $\forall$ (pro všechny, pro každé); např. $\forall x \in \mathbb{R} : x - 1 < x$.

2. Tvrzení, věty, logické symboly

Jako *tvrzení* lze označit např. výrok *Kniha je bílá. Matematická věta*, resp. *matematické tvrzení* je pravdivý matematický výrok, který má význam v matematické teorii. Matematickou větu nazýváme také *pravidlo* (obsahuje-li návod k výpočtu) nebo *lemma* (jedná-li se o pomocnou větu). Je-li tvrzení pravdivé, říkáme, že výrok platí, např. $2+3=5$. O nepravdivém tvrzení (nepravdivé formuli, kontradikci) mluvíme tehdy, když výrok neplatí, např. $x^2 < -100$.

Rozlišujeme následující typy výroků:

- Konjunkce: $\wedge$ (a, a zároveň); např. $(x > 5) \wedge (x \leq 6) \Longrightarrow 5 < x \leq 6$
- Disjunkce: $\vee$ (platí jedno nebo druhé nebo obojí); např.
$$(x > 5) \vee (x \leq 6) \Longrightarrow x \in \mathbb{R}$$
- Implikace: $\Longrightarrow$ (jestliže ... pak); např $x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1$
- Ekvivalence: $\Longleftrightarrow$ (tehdy a jen tehy); např. $x^2 > 0 \Longleftrightarrow x \neq 0$
- Negace: $\neg\, x > 0 \Longrightarrow x \leq 0$

1.3 Definice, věty, druhy důkazů

Důkaz přímý: Pro důkaz tvrzení $P \Longrightarrow Q$ sestavíme řetězec pravdivých implikací $P \Longrightarrow P_1 \Longrightarrow P_2 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow P_n \Longrightarrow Q$.

Důkaz nepřímý: Dokážeme (přímo) obměnu implikace $P \Longrightarrow Q$, tedy $\neg Q \Longrightarrow \neg P$.

Důkaz sporem: Vyjdeme z negace $\neg P$ dokazovaného tvrzení P a pomocí pravdivých implikací odvodíme tvrzení nepravdivé. Tedy původní tvrzení P je pravdivé.

Důkaz matematickou indukcí: Tento důkaz používáme pro dokazování tvrzení typu *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$*, resp. pro všechna* $n \geq n_0$ *platí* P. Důkaz sestává ze dvou částí: v prvním kroku dokážeme tvrzení pro n_0 a ve druhém (indukčním) kroku dokážeme, že platí-li výrok P pro n, pak platí i pro $n+1$.

1.4 Číselné množiny

Definujeme následující číselné množiny:

- $\mathbb{N}-$ množina přirozených čísel; $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Z}-$ množina celých čísel (celá čísla);
  $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, -3, \dots\}$
- $\mathbb{Q}-$ množina racionálních čísel; $\left\{\frac{m}{n}\right\}, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$
- $\mathbb{Q}^+-$ množina iracionálních čísel (např. $\sqrt{2}, e$ (základ přirozeného logaritmu), π (Ludolphovo číslo), $\log 5, \dots$)
- $\mathbb{R}-$ množina reálných čísel
- $\mathbb{C}-$ množina komplexních čísel $\{(a, b) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}, i$ – komplexní jednotka, $i^2 = -1, z = a + ib \in \mathbb{C}$.
- Platí: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^+$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

1.5 Intervaly

Budeme interpretovat čísla jako body (celočíselné nebo reálné osy) a naopak body přímky jako čísla. Množina čísel x splňujících nerovnosti $a \leq x \leq b$ (resp. $a < x < b$) se nazývá uzavřený (resp. otevřený) interval s koncovými body a a b. Analogicky definujeme intervaly polootevřené, polouzavřené a nekonečné:

- uzavřený interval: $[a, b]$ nebo $< a, b >$, $a \leq x \leq b$
- otevřený interval: (a, b) nebo $]a, b[$, $a < x < b$
- polootevřený (polouzavřený) interval: $[a, b)$, $a \leq x < b$ ($(a, b]$, $a < x \leq b$)
- nekonečné intervaly: $(-\infty, \infty), (-\infty, a], (-\infty, a), (a, \infty), [a, \infty)$.

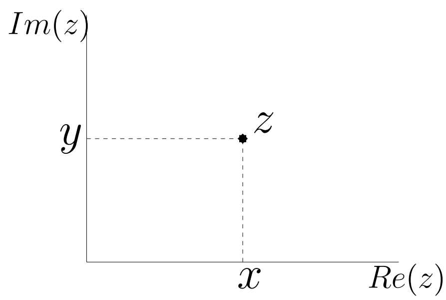
1.6 Základní vlastnosti komplexních čísel

1. Algebraický tvar komplexního čísla

Číslo

$$z = x + iy,$$

kde x a y jsou libovolná reálná čísla a i je *imaginární jednotka*, se nazývá *algebraický tvar* komplexního čísla. Pak x se nazývá *reálná* a y *imaginární část* komplexního čísla z.



Obrázek 1.6.1: Komplexní číslo $z = x + iy$ v komplexní rovině

Podle definice jsou si dvě komplexní čísla *rovna* tehdy a jen tehdy, jsou-li si rovny jejich reálné a imaginární části. Potom je rovnost

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$$

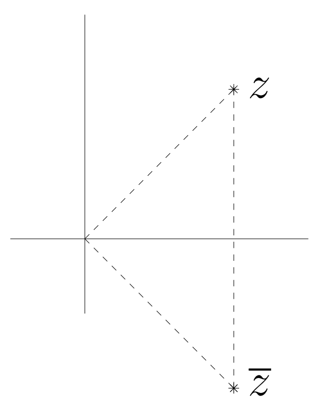
ekvivalentní dvěma rovnostem

$$x_1 = x_2 \qquad \text{a} \qquad y_1 = y_2.$$

Komplexní číslo $z = x + iy$ lze zobrazit jako bod v rovině xy, na jejíž ose x je znázorněna reálná část z a na ose y imaginární část z (viz. obr.1.6.1). Pro účely tohoto zobrazení se osa x nazývá *reálná osa* a osa y se nazývá *imaginární osa,* rovina Oxy se pak nazývá *komplexní rovina.*

Komplexní číslo si lze představit také jako vektor, jehož počátek je totožný s počátkem soustavy souřadnic a konec s bodem, na nějž se zobrazí dané komplexní číslo. Souřadnice vektoru na osách x a y znázorňují reálnou a imaginární část komplexního čísla z.

Je-li $y = 0$, pak komplexní číslo $z = x + i0 = x$ je reálné číslo znázorněné bodem reálné osy; je-li naopak $x = 0$, číslo $z = 0 + iy = iy$ se nazývá *ryze imaginární* a je znázorněno bodem $(0, y)$ ležícím na imaginární ose.



Obrázek 1.6.2: $z, \bar{z}$ - čísla komplexně sdružená

Číslo komplexně sdružené (viz. obr.1.6.2) s daným komplexním číslem $z = a + ib$ značíme $\overline{z}$ a je definováno jako

$$\overline{z} = a - ib.$$

Operace *odčítání* je definována jako operace inverzní ke sčítání; tj. $z = a + ib$ se nazývá *rozdíl* mezi komplexními čísly $z_1 = a_1 + ib_1$ a $z_2 = a_2 + ib_2$, platí-li $a = a_1 - a_2$ and $b = b_1 - b_2$.

Operace *dělení* komplexních čísel je definována jako operace inverzní k operaci násobení. Komplexní číslo $z = a + ib$ se nazývá *kvocientem* komplexních čísel $z_1 = a_1 + ib_1$ a $z_2 = a_2 + ib_2$, platí-li $z_1 = z \cdot z_2$. Řešením této rovnice (za předpokladu, že $z_2 \neq 0$) dostáváme

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} \cdot \frac{a_2 - ib_2}{a_2 - ib_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} \ .$$

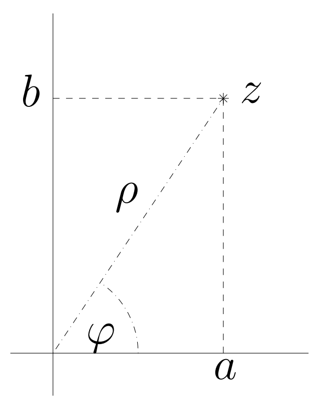
2. Trigonometrický tvar komplexního čísla

Jelikož je komplexní číslo definováno jako dvojice čísel reálných, je přirozené zobrazovat komplexní číslo $z = a + ib$ jako bod v rovině xy s kartézskými souřadnicemi $x = a$ a $y = b$. Tuto rovinu nazveme **komplexní rovinou;** osa x se nazývá *reálná* osa, osa y se nazývá *imaginární* osa komplexní roviny. Je také možné definovat pozici bodu v rovině pomocí polárních souřadnic (ρ, φ), kde ρ je vzdálenost bodu od počátku souřadnic a φ je úhel, který svírá vektor průvodič s kladnou poloosou osy x. Kladný směr pro měření úhlu φ je směr proti pohybu hodinových ručiček. Využijeme-li vztahu mezi kartézskými a polárními souřadnicemi

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi,$$

dostáváme takzvaný **trigonometrický** (nebo *polární*) tvar zápisu komplexního čísla:

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$



Obrázek 1.6.3: Trigonometrický tvar komlexního čísla

Vzdálenost ρ se nazývá *modul* nebo *absolutní hodnota* z; úhel φ se nazývá *argument* nebo *amplituda* z (viz. obr.1.6.3). Obvykle používáme značení

$$\rho = |z|, \varphi = \mathrm{Arg} z.$$

Je-li $z = a + ib$, pak

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, tg(\varphi) = \frac{b}{a}.$$

Argument komplexního čísla je jednoznačně definován až na periodu 2π. Je vhodné označit jako $\arg z$ hodnotu argumentu v intervalu

$$\varphi_0 \leq \arg z \leq 2\pi + \varphi_0,$$

kde φ_0 je libovolné pevně zvolené číslo (např. $\varphi_0 = 0$ nebo $\varphi_0 = \pi$). Pak

$$\mathrm{Arg} z = \arg z + 2k\pi \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Hodnota $\arg z$ se nazývá *hlavní* hodnota argumentu. V následujícím budeme používat $\varphi_0 = 0$.
Argument komplexního čísla $z = 0$ není definován a jeho modul je roven nule.
Dvě nenulová komplexní čísla jsou si *rovna* tehdy a jen tehdy, když jsou si rovny jejich moduly a hodnoty argumentů se buďto rovnají, nebo se liší o násobek 2π.

3. Exponenciální tvar komplexního čísla

Exponenciální tvar (exponenciální označení) komplexního čísla

$$z = \rho e^{i\varphi}$$

lze získat z trigonometrického tvaru užitím tzv. *Eulerovy formule*:

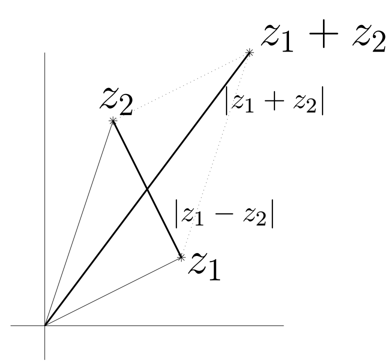
$$\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi.$$

Podle pravidel násobení dostáváme pro $z_1 = \rho_1 \mathrm{e}^{i\varphi_1}$ a $z_2 = \rho_2 \mathrm{e}^{i\varphi_2}$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 \mathrm{e}^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \tag{1.6.1}$$

a

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \mathrm{e}^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \ .$$



Obrázek 1.6.4: $|z_1 + z_2|, |z_1 - z_2|$

Operace sčítání a odčítání komplexních čísel odpovídají operacím s vektory: součet dvou komplexních čísel (vektorů) z_1 a z_2 je vektor $z_1 + z_2$. Analogicky se sestrojí vektor $z_2 - z_1$ jako rozdíl vektorů z_2 a z_1. Tak okamžitě dostáváme trojúhelníkové nerovnosti

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$
$$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|.$$

4. De Moivreova věta

Ze vztahu (1.6.1) lehce dostáváme tak zvanou *De Moivreovu větu:*

$$z^n = [\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

kde n je kladné celé číslo.

5. Odmocňování komplexního čísla

Komplexní číslo $z_1 = \sqrt[n]{z}$ se nazývá n-tou odmocninou komplexního čísla z, jestliže platí $z = z_1^n$. Je-li $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ potom podle De Moivreovy věty (nebo Eulerovy formule)

$$z_1^n = \rho_1^n(\cos n\varphi_1 + i\sin n\varphi_1).$$

Je-li $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, pak

$$\rho = \rho_1^n \Longrightarrow \rho_1 = \sqrt[n]{\rho}$$

a

$$\varphi = n\varphi_1 \Longrightarrow \varphi_1 = \frac{\varphi}{n}\,.$$

Jak bylo výše uvedeno, argument komplexního čísla je definován jednoznačně až na periodu 2π. Z toho důvodu dostáváme pro argument komplexního čísla z_1

$$\varphi_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}; k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

kde φ je jedna z hodnot argumentu komplexního čísla z. Tedy existují různá komplexní čísla která, umocněná na n-tou, jsou rovna témuž komplexnímu číslu z. Moduly těchto komplexních čísel jsou stejné a jsou rovny $\sqrt[n]{\rho}$, jejich argumenty se liší o násobky $2\pi/n$. Počet různých hodnot n-tých odmocnin komplexního čísla z je n. Body v komplexní rovině odpovídající různým hodnotám n-té odmocniny komplexního čísla z leží ve vrcholech pravidelného $n-$úhelníka vepsaného do kruhu o poloměru $\sqrt[n]{\rho}$ se středem v bodě $z = 0$. Odpovídající hodnoty φ_k získáme tak, že za k dosadíme hodnoty $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Klasická analýza položila problém rozšíření reálných čísel takovým způsobem, aby výsledkem nejen elementárních operací sčítání a násobení, ale také operace odmocňování bylo číslo z téže (rozšířené) číselné množiny. Jak vidíme, komplexní čísla tento problém řeší.

Dostali jsme vzorec

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$
$$k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

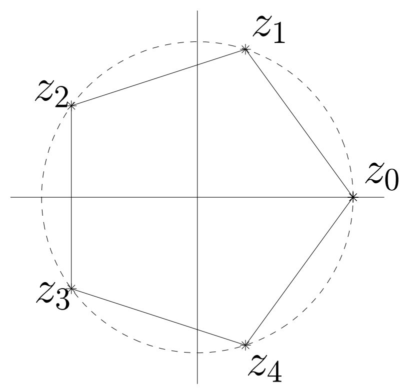
Příklad 1 *Najděte všechny hodnoty* $\sqrt{i}$.
Řešení. *Nechť* $z = i = e^{i\pi/2}$. *Pak*

$$z_k = \cos\frac{\pi/2 + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\pi/2 + 2k\pi}{2}\,,\ k = 0, 1$$

a

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),$$
$$z_1 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

Příklad 2 *Graficky znázorněte všechna řešení* $z^5 = 1$.
Řešení.



Obrázek 1.6.5: Řešení $z^5 = 1$

1.7 Zavedení pojmu funkce, inverzní funkce, funkce dvou a více proměnných

Nechť D_f je číselná množina a nechť je dán jistý předpis, podle něhož každému číslu $x \in D_f$ přiřadíme (jedinou) hodnotu y. Pak říkáme, že na množině D_f je definována (jednohodnotová) funkce a píšeme: $y = f(x), (x \in D_f)$. Pak y nazýváme hodnotou funkce (funkcí, závisle proměnnou), x argumentem (nezávisle proměnnou).
D_f nazýváme definičním oborem funkce ("domain"), H_f nazýváme oborem hodnot funkce ("image"), $y \in H_f$, $H_f = f(D_f)$.

Dále říkáme, že funkce f zobrazuje množinu D_f na množinu H_f a f nazýváme zobrazením. Pojem funkce může být také chápán geometricky.

1. Speciální typy funkcí

Definice 1 *Funkce, pro niž platí:*

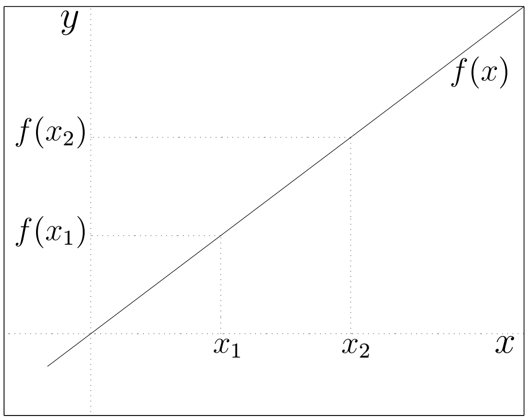
$$\forall x_1, x_2 \in D_f \ (x_1 \neq x_2) \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

se nazývá prostá.

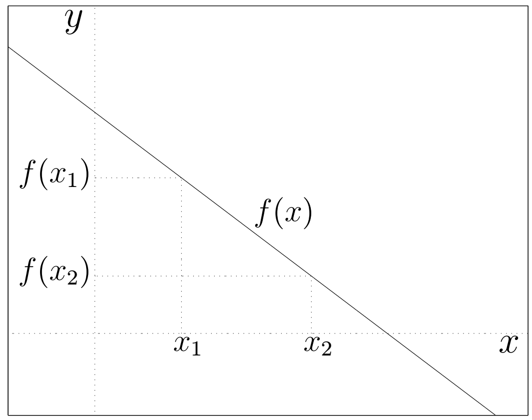
Příklad 3 *Jsou funkce* $y = x^2, y = \cos x, y = x^{-1}$ *jednohodnotové funkce ve svých definičních oborech* D_f*? (Viz grafy funkcí.)*

Definice 2 *Funkce $f(x)$ je (na intervalu I):*

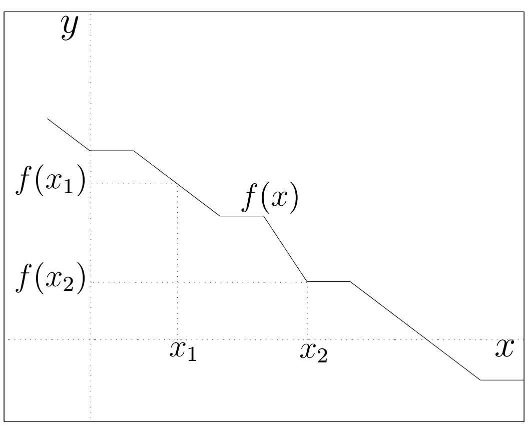
- *rostoucí, jestliže* $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 : f(x_1) < f(x_2)$
- *klesající, jestliže* $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 : f(x_1) > f(x_2)$
- *nerostoucí, jestliže* $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 : f(x_1) \geq f(x_2)$
- *neklesající, jestliže* $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2)$.



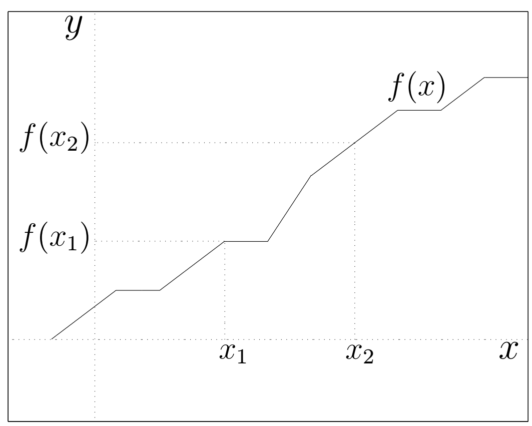
Obrázek 1.7.1: Funkce rostoucí



Obrázek 1.7.2: Funkce klesající



Obrázek 1.7.3: Funkce nerostoucí



Obrázek 1.7.4: Funkce neklesající

Definice 3 *Rostoucí a klesající funkce se nazývají ryze monotónní.*

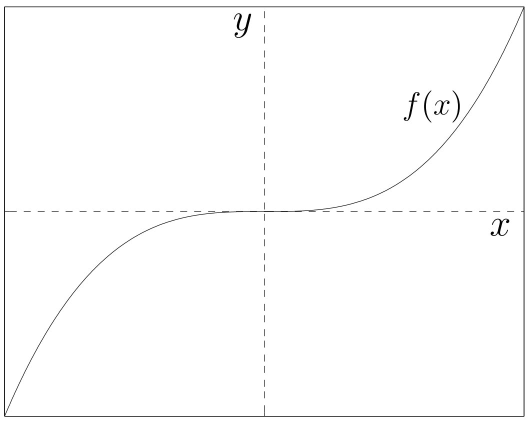
Definice 4 *Funkce $f(x)$ se nazývá omezená, jestliže*

$$\exists\ M \in \mathbb{R}\ \ \forall x \in D_f :\ \ |f(x)| \leq M.$$

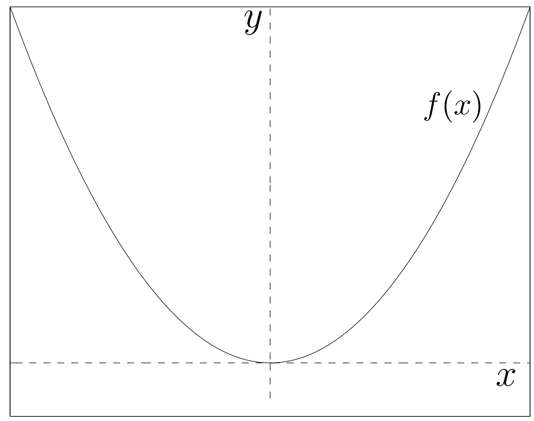
Příklad 4 *Jsou funkce* $f(x) = x^2, f(x) = \sin x$ *omezené?*

Definice 5 *Funkce* $f(x)$ *se nazývá:*

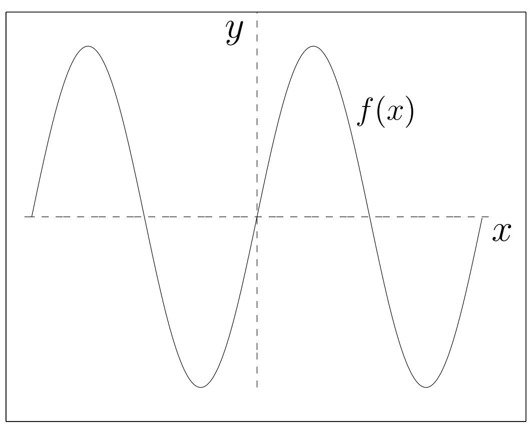
- *lichá, jestliže* $\forall x \in D_f : f(x) = -f(-x)$,
- *sudá, jestliže* $\forall x \in D_f : f(x) = f(-x)$,
- *periodická, jestliže* $\exists\ \omega > 0, \omega \in \mathbb{R}, \forall x \in D_f : f(x + \omega) = f(x)$.



Obrázek 1.7.5: Funkce lichá



Obrázek 1.7.6: Funkce sudá



Obrázek 1.7.7: Funkce periodická

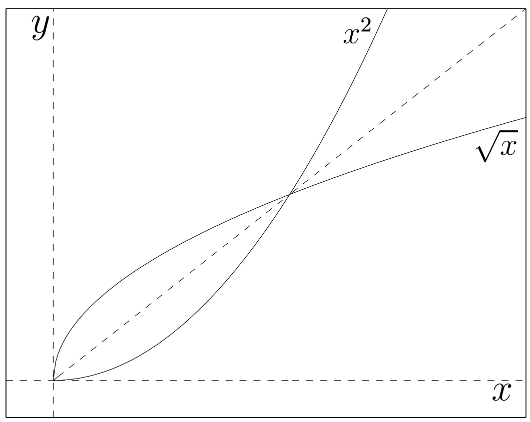
1.8 Inverzní funkce

Uvažujme libovolnou funkci $y = f(x)$ definovanou na množině E a označme $E_1 = f(E)$ obraz E. Přiřaďme každému $y \in E_1$ množinu všech $x \in E$, pro něž $y = f(x)$. Dostáváme funkci $x = \varphi(y)$ definovanou na E_1. Funkce $\varphi(y)$ se nazývá funkce inverzní k $f(x)$.

Budeme předpokládat, že inverzní funkce je jednohodnotová. Takto dostáváme zřejmé identity: $\varphi[f(x)] = x$, $x \in E$ a $f[\varphi(y)] = y$, $y \in E_1$. Někdy je pohodlné označit funkci inverzní k f symbolem f^{-1}. Pak $f^{-1}f(x) = x$, $x \in E$ a $ff^{-1}(y) = y$, $y \in E_1$.

Příklad 5

- $f(x) = x^2,\ f^{-1}(x) = \sqrt{x},\ (y = x^2,\ x = \sqrt{y}), x \geq 0$
- $y = kx, k \neq 0, k \in \mathbb{R},\ y = \frac{1}{k}x,$
- $y = \arccos x$ *je inverzní k* $y = \cos x$ *na* $[0, \pi]$.



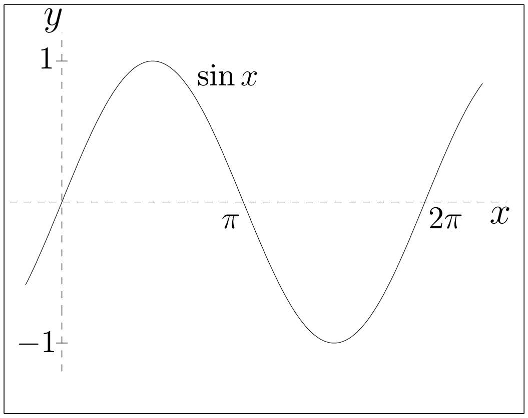
Obrázek 1.8.1: Funkce inverzní

Věta 1.8.1 *Grafy inverzních funkcí $f(x)$, $f^{-1}(x)$ jsou symetrické podle osy $y = x$.*

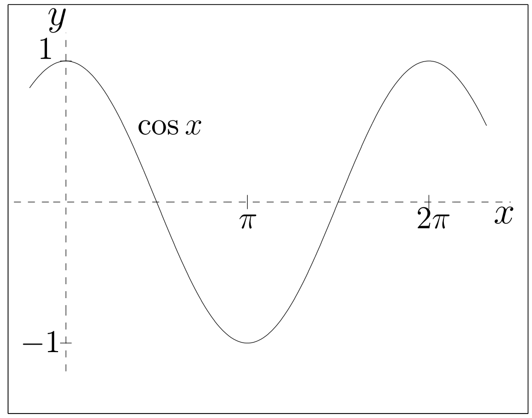
Důkaz. Nechť $y = f(x)$, $y = g(x)$ a $f[g(x)] = x$. Je-li $b = f(a)$, pak $g(b) = a$ a body $[a, b]$, $[b, a]$ jsou symetrické podle osy $y = x$.

1.9 Trigonometrické funkce

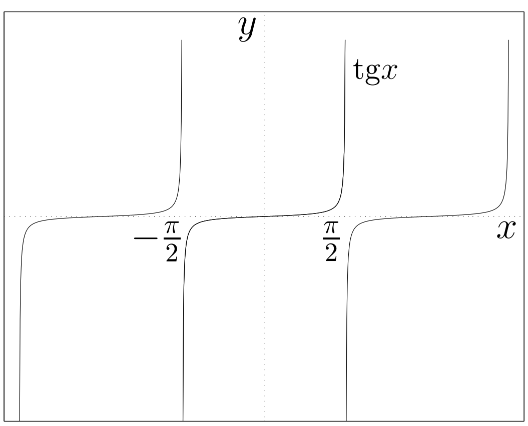
- Funkce sinus: $\sin\alpha$,
- Funkce kosinus: $\cos\alpha$,
- Funkce tangens: $\mathrm{tg}\alpha$,
- funkce kotangens: $\mathrm{cotg}\alpha$.



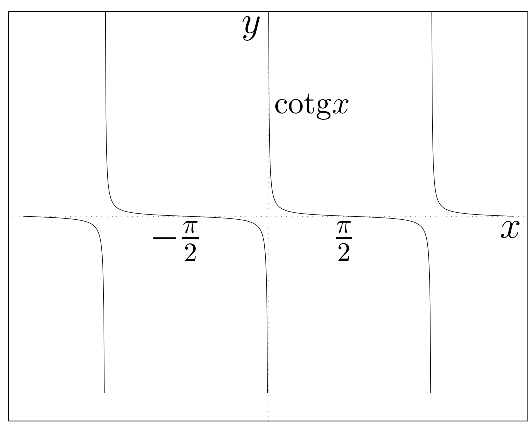
Obrázek 1.9.1: Funkce sinus



Obrázek 1.9.2: Funkce cosinus



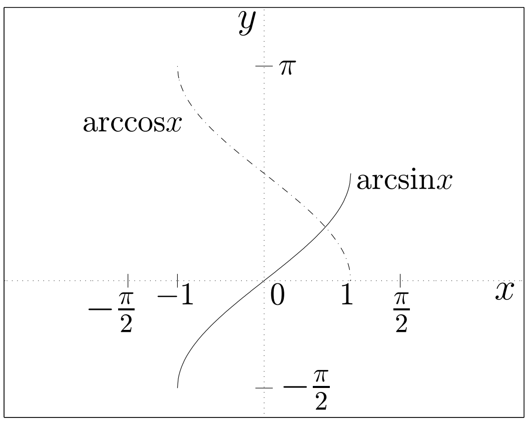
Obrázek 1.9.3: Funkce tangens



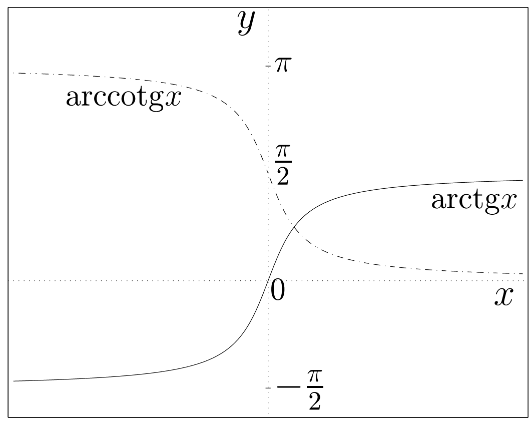
Obrázek 1.9.4: Funkce cotangens

1.10 Inverzní trigonometrické funkce

- $y = \arcsin x$ (arkus sinus) je inverzní k funkci $y = \sin x$;
  $\arcsin(\sin x) \equiv x, \sin(\arcsin x) \equiv x, x \in D_f = [-1, 1]$.
- $y = \arccos x$ (arkus kosinus) je inverzní k funkci $y = \cos x$;
  $\arccos(\cos x) \equiv x, \cos(\arccos x) \equiv x, x \in D_f = [-1, 1]$.
- $y = \mathrm{arctg}\, x$ (arkus tangens) je inverzní k funkci $y = \mathrm{tg}\, x$;
  $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x) \equiv x, \mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\, x) \equiv x, x \in D_f = (-\infty, +\infty)$,
- $y = \mathrm{arccotg}\, x$ (arkus kotangens) je inverzní k funkci $y = \mathrm{cotg}\, x$;
  $\mathrm{arccotg}(\mathrm{cotg}\, x) \equiv x, \mathrm{cotg}(\mathrm{arccotg}\, x) \equiv x, x \in D_f = (-\infty, +\infty)$.



Obrázek 1.10.1: Funkce Arcsin, Arccos



Obrázek 1.10.2: Funkce Arctg, Arccotg

1.11 Exponenciální a logaritmické funkce

- $y = a^x$ (exponenciální funkce), $D_f = \mathbb{R}, a > 0, a \in \mathbb{R}$,
- $y = \log_a x$ (logaritmická funkce) $D_f = (0, \infty)$ je inverzní k exponenciální funkci.

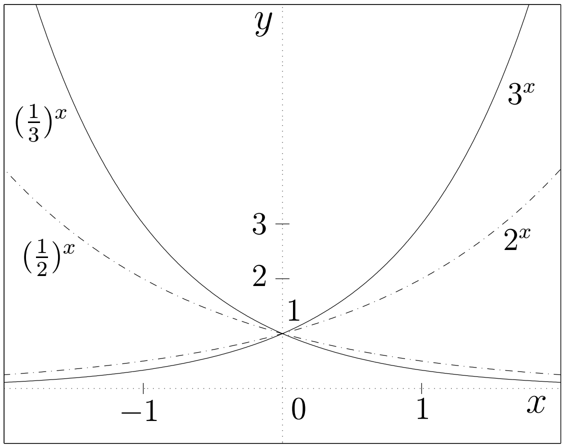
$$y = a^x \Longleftrightarrow x = \log_a y\,.$$

Definice 6 $y = \log_a x$ *jestliže* $a^y = x$; $a > 0, a \neq 1, x > 0$.

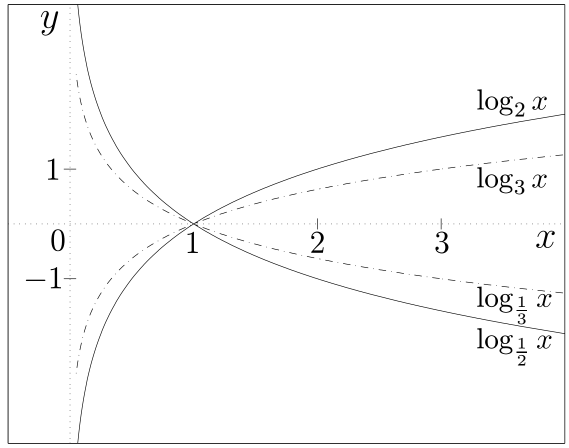
Následující vzorec je užitečný:

$$\log_\beta \alpha = \frac{\log_\gamma \alpha}{\log_\gamma \beta}$$

Je-li $a = 10$, pak $\log_{10} x = \log x$; je-li $a = e$, pak $\log_e x = \ln x$.



Obrázek 1.11.1: Funkce exponenciální

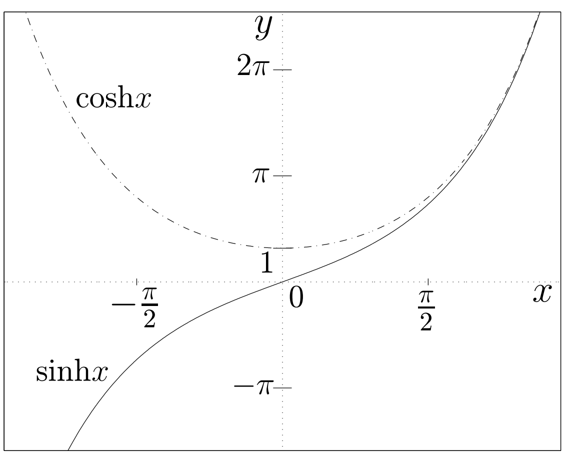


Obrázek 1.11.2: Funkce logaritmická

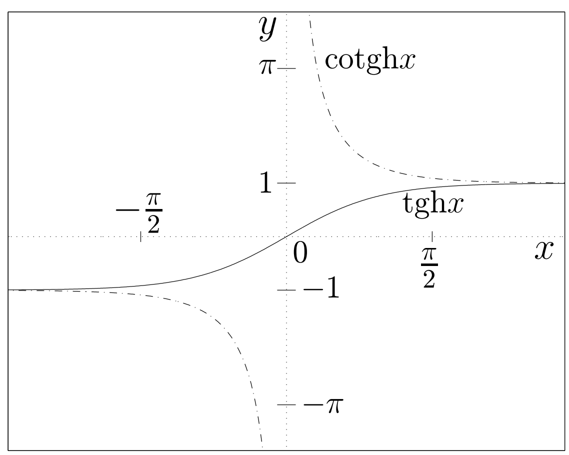
1.12 Hyperbolické a inverzní hyperbolické funkce

Definice 7

- $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ *(hyperbolický sinus)*,
- $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ *(hyperbolický kosinus)*,
- $\mathrm{tgh}\, x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ *(hyperbolický tangens)*,
- $\mathrm{cotgh}\, x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ *(hyperbolický kotangens)*.



Obrázek 1.12.1: Funkce sinh, cosh



Obrázek 1.12.2: Funkce tgh, cotgh

Inverzní hyperbolické funkce:

- $y = \operatorname{argsinh} x$ (je funkce inverzní k $y = \sinh x$)
- $y = \operatorname{argcosh} x$ (je funkce inverzní k $y = \cosh x$)
- $y = \operatorname{argtgh} x$ (je funkce inverzní k $y = \operatorname{tgh} x$)
- $y = \operatorname{argcotgh} x$ (je funkce inverzní k $y = \operatorname{cotgh} x$)

Některé vzorce:

$$\begin{aligned}
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1, \\
\cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x, \\
\sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh x, \\
\cosh^2 x &= \frac{1}{1 - \operatorname{tgh}^2 x}, \\
\sinh^2 x &= \frac{\operatorname{tgh}^2 x}{1 - \operatorname{tgh}^2 x}\ .
\end{aligned}$$

1.13 Definice funkce komplexní proměnné

Předpokládejme, že je dána vektorová funkce skalárního argumentu, jejíž průmět na osu z je identicky roven nule pro všechny hodnoty parametru t. Pak

$$\vec{A}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \tag{1.13.1}$$

a křivka $\vec{r} = \vec{A}(t)$ leží celá v rovině Oxy. V tomto případě je příhodné považovat vektor

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

za geometrickou reprezentaci komplexního čísla $z = x + iy$ a mluvit místo o vektorové funkci $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ o komplexní funkci $z(t) = x(t) + iy(t)$ reálné proměnné t. Vektor $\vec{i}$ není totožný s imaginární jednotkou.

Definice 8 *Jestliže je každé hodnotě parametru t přiřazeno určité komplexní číslo*

$$z(t) = x(t) + iy(t), \tag{1.13.2}$$

kde $x(t)$ a $y(t)$ jsou funkce nabývající reálných hodnot, $z(t)$ se nazývá komplexní funkce *reálného argumentu t.*

Parametr t nabývá hodnot z daného intervalu. *Graf* komplexní funkce $z(t) = x(t) + iy(t)$ je, podle definice, křivka s parametrickými rovnicemi $x = x(t)$, $y = y(t)$; tedy, hodografy vektorové funkce (1.13.1) a komplexní funkce (1.13.2) jsou shodné.

Příklad 6 *Pro funkci*

$$z(t) = t + it^2, \qquad t \in (-\infty, +\infty)$$

máme $x = t$ a $y = t^2$. Hodografem je parabola $y = x^2$. Pokud t nabývá hodnot od $-\infty$ do $+\infty$, body paraboly se pohybují tak, že kladná část osy y zůstává vždy vlevo.

1.14 Mnohočleny a racionální funkce

Definice 9 *Polynomem n-tého stupně proměnné x nazveme výraz*

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a $a_n, \ldots, a_1, a_0$ jsou libovolná reálná či komplexní čísla, přičemž $a_n \neq 0$.

Polynomu může být zapsán i ve tvaru

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n.$$

Podle toho, z jaké množiny bereme koeficienty $a_i, i = 1, 2, \ldots, n$, mluvíme o polynomu celočíselném, reálném, racionálním, komplexním, atd. Polynomy můžeme sčítat, násobit číslem, násobit mezi sebou a dělit. Nechť pro $n \geq m$ máme

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$

potom

$$P_n(x) + Q_m(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_m + b_m)x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \cdots + a_n x^n,$$

$$\alpha P_n(x) = (\alpha a_n)x^n + (\alpha a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (\alpha a_1)x + (\alpha a_0),$$
$$P_n(x) \cdot Q_m(x) = c_{n+m}x^{n+m} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

kde

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \; j = 0, 1, \ldots, m.$$

Pro $n \geq m$ platí

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)},$$

kde $R_k(x)$ je zbytek stupně $k < m$, což můžeme zapsat ve tvaru

$$P_n(x) = S_{n-m}(x)Q_m(x) + R_k(x).$$

Definice 10 *Polynom $D(x)$, který dělí beze zbytku polynomy $P_n(x)$ a $Q_m(x)$ se nazývá společným dělitelem polynomů $P_n(x)$ a $Q_m(x)$.*
Polynom $D(x)$, který má ze všech společných dělitelů nejvyšší stupeň, se nazývá největší společný dělitel polynomů $P_n(x)$ a $Q_m(x)$.

Eukleidův algoritmus
Nechť jsou dány nenulové polynomy P, Q, stupeň $P = \text{st}\,(P) > \text{st}\,(Q)$. Polynom P vydělíme polynomem Q a dostaneme částečný podíl S a zbytek R_1, st $(R_1) <$ st (Q):

$$P = QS + R_1.$$

Nyní vydělíme polynom Q zbytkem R_1 a získáme částečný podíl S_1 a zbytek R_2, st $(R_2) <$ st (R_1),

$$Q = R_1 S_1 + R_2.$$

Vydělíme polynom R_1 zbytkem R_2 a dostaneme

$$R_1 = R_2 S_2 + R_3.$$

Pokračujeme dále, až v k-tém kroku dostaneme

$$R_{k-2} = R_{k-1} S_{k-1} + R_k.$$

Protože st $(R_k) <$ st $(R_{k-1}) < \cdots <$ st $(R_2) <$ st $(R_1) <$ st $(Q) <$ st (P), po konečném počtu t kroků dostaneme

$$R_{t-2} = R_{t-1} S_{t-1} + R_t,$$

$$R_{t-1} = R_t S_t + 0.$$

Z poslední rovnosti plyne, že polynom R_t je dělitelem polynomu R_{t-1}. Dosazením do předposlední rovnosti dostaneme

$$R_{t-2} = R_t S_t S_{t-1} + R_t = R_t \left(S_t S_{t-1} + 1 \right),$$

neboli R_t je i dělitelem polynomu R_{t-2} a tak můžeme pokračovat dále a ukázat, že všechny polynomy $R_j, j < t$ jsou dělitelné polynomem R_t, tedy i P a Q jsou dělitelné R_t.

Obráceně, nechť je polynom D společným dělitelem polynomů P a Q. Potom D bude dělitelem polynomu R_1. Jestliže D dělí Q a R_1, potom dělí i R_2. Jestliže dělí R_1 a R_2, dělí i R_3, atd., polynom D tedy musí dělit i R_t. R_t je tedy *největším společným dělitelem polynomů P a Q.*

Definice 11 *Číslo α je kořenem polynomu $P_n(x)$, jestliže platí*

$$P_n(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0 = 0.$$

Věta 1.14.1 Základní věta algebry
Každý polynom s reálnými nebo komplexními koeficienty stupně $n \geq 1$ má aspoň jeden kořen, obecně komplexní.

Věta 1.14.2 Bézoutova *Číslo α je kořenem polynomu $P_n(x)$ stupně $n \geq 1$ právě tehdy, když*

$$P_n(x) = (x - \alpha) Q_{n-1}(x),$$

kde $Q_{n-1}(x)$ je vhodný polynom stupně $n - 1$.

Důsledek 1 *Každý polynom $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, stupně $n \geq 1$ s (komplexními) kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, přičemž kořeny nemusí být navzájem různé, se dá rozložit na součin kořenových činitelů*

$$P_n(x) = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n).$$

Definice 12 *Násobností kořene α rozumíme počet, kolikrát se α vyskytuje v rozkladu na kořenové činitele.*

Důsledek 2 *Kořen α polynomu $P_n(x)$ má násobnost k, jestliže $P_n(x)$ je dělitelný polynomem $(x-\alpha)^k$, ale není dělitelný polynomem $(x-\alpha)^{k+1}$.*

Věta 1.14.3 Hornerovo pravidlo
Pro výpočet hodnoty polynomu

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

v bodě $x = \alpha$ nebo pro určení koeficientů b_i polynomu

$$Q_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

vzniklého dělením polynomu $P_n(x)$ členem $(x-\alpha)$ používáme tohoto postupu:

$$\begin{array}{r|llllll} x=\alpha & a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_1 & b_0 & r \end{array},$$

kde platí

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n, \\ b_{n-2} &= b_{n-1}\alpha + a_{n-1}, \\ \dots & \quad \dots \\ b_1 &= b_2\alpha + a_2, \\ b_0 &= b_1\alpha + a_1, \\ r &= b_0\alpha + a_0 = P_n(\alpha) \end{aligned}$$

Důsledek 3 *Jestliže při použití Hornerova pravidla dostaneme $r = 0$, potom je α kořenem polynomu $P_n(x)$.*

Věta 1.14.4 Vietovy vzorce
Mezi koeficienty a kořeny polynomu

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$$

platí vztahy

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= -a_n(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n), \\ a_{n-2} &= a_n(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_2\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n), \\ \dots & \quad \dots \\ a_0 &= (-1)^n a_n(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n). \end{aligned}$$

Důsledek 4 *Každý kořen dělí absolutní člen.*

Věta 1.14.5 *Mějme polynom s celočíselnými koeficienty*

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Celé číslo α může být kořenem, jestliže α dělí absolutní člen a_0.
Racionální číslo $\frac{p}{q}$ (kde p je celé číslo a q je přirozené číslo nesoudělné s p) může být kořenem polynomu $P_n(x)$, jestliže p dělí absolutní člen a_0 a q dělí koeficient u nejvyšší mocniny a_n.

Definice 13 *Nechť $P_n(x)$ a $Q_m(x)$ jsou polynomy. Jejich podíl*

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

nazveme racionální funkcí lomenou.
Je-li $n < m$, mluvíme o racionální funkci ryze *lomené.*

Věta 1.14.6 *Každá racionální neryze lomená funkce $R(x)$ se dá jednoznačně vyjádřit ve tvaru*

$$R(x) = F(x) + G(x),$$

kde $F(x)$ je polynom stupně $n - m$ a $G(x)$ je racionální funkce ryze lomená.

Věta 1.14.7 O rozkladu na parciální zlomky
Mějme reálnou ryze lomenou racionákní funkci

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \quad n < m,$$

s rozkladem jmenovatele na kořenové činitele nad $\mathbb{R}$

$$Q_m(x) = a_m(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x-\alpha_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}(x^2+p_2x+q_2)^{s_2}\ldots(x^2+p_vx+q_v)^{s_v},$$

kde $\alpha_i,\ i = 1, 2, \ldots, r$ jsou reálné kořeny násobnosti k_i a kvadratický trojčlem $x^2 + p_j x + q_j$ $j = 1, 2, \ldots, v, p_j^2 - 4q_j < 0$, reprezentuje dvojici komplexně sdružených kořenů s násobností s_j. Potom

$$R(x) = \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{A_{i1}}{(x-\alpha_i)} + \frac{A_{i2}}{(x-\alpha_i)^2} + \cdots + \frac{A_{ik_i}}{(x-\alpha_i)^{k_i}}\right) +$$

$$+\sum_{j=1}^{v}\left(\frac{M_{j1}x + N_{j1}}{(x^2+p_jx+q_j)} + \frac{M_{j2}x + N_{j2}}{(x^2+p_jx+q_j)^2} + \cdots + \frac{M_{js_j}x + N_{js_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{s_j}}\right),$$

kde všechny koeficienty A_{ik}, M_{js}, N_{js} jsou reálná čísla.

Příklad 7 *Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci*

$$R(x) = \frac{6x^2 + 7x + 4}{2x^3 + 3x^2 - 1}.$$

Řešení: Rozložíme jmenovatele na součin kořenových činitelů (nejlépe pomocí Hornerova schématu).

$$2x^3 + 3x^2 - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+1)^2.$$

Máme jeden prostý reálný kořen $x = \frac{1}{2}$ *a jeden reálný kořen* $x = -1$*, který má násobnost 2. Dosadíme podle předchozí věty a dostaneme:*

$$\frac{6x^2 + 7x + 4}{2x^3 + 3x^2 - 1} = \frac{A}{x - \frac{1}{2}} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

Neznámé koeficienty určíme tak, že celou rovnici vynásobíme jmenovatelem racionální funkce (t.j. polynomem $2x^3 + 3x^2 - 1$*) a upravíme:*

$$6x^2 + 7x + 4 = A2(x+1)^2 + B2(x - \frac{1}{2})(x+1) + C2(x - \frac{1}{2}),$$

$$6x^2 + 7x + 4 = A2(x^2 + 2x + 1) + B(2x - 1)(x+1) + C(2x - 1),$$

$$6x^2 + 7x + 4 = A2(x^2 + 2x + 1) + B(2x^2 + x - 1) + C(2x - 1).$$

Srovnáním koeficientů polynomů na obou stranách rovnice dostaneme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 6 &= 2A + 2B \\ 7 &= 4A + B + 2C \\ 4 &= 2A - B - C \end{aligned}$$

Soustava má jediné řešení

$$A = 2, B = 1, C = -1.$$

Rozklad na parciální zlomky má proto tvar

$$\frac{6x^2 + 7x + 4}{2x^3 + 3x^2 - 1} = \frac{2}{x - \frac{1}{2}} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Příklad 8 *Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci*

$$F(x) = \frac{16x^3 - 15x^2 + 6x + 5}{(2x-1)^2(x^2 + 2x + 5)}.$$

Řešení: Jmenovatel má jeden reálný kořen $x = \frac{1}{2}$ *násobnosti 2 a dvojici komplexně sdružených kořenů. Rozklad na parciální zlomky bude mít tvar:*

$$\frac{16x^3 - 15x^2 + 6x + 5}{(2x-1)^2(x^2 + 2x + 5)} = \frac{A}{x - \frac{1}{2}} + \frac{B}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 5}.$$

Po vynásobení společným jmenovatelem dostaneme

$$16x^3-15x^2+6x+5 = 4A\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2+2x+5)+4B(x^2+2x+5)+4(Cx+D)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2.$$

Po úpravě dostaneme soustavu rovnic, která má řešení

$$A = 0,\ B = \frac{1}{4},\ C = 4,\ D = 0.$$

Rozklad na parciální zlomky má tedy tvar

$$\frac{16x^3-15x^2+6x+5}{(2x-1)^2(x^2+2x+5)} = \frac{1}{(2x-1)^2} + \frac{4x}{x^2+2x+5}.$$

Věta 1.14.8 *Mějme reálnou ryze lomenou racionální funkci*

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \quad n < m,$$

jejíž jmenovatel má pouze prosté kořeny

$$Q_m(x) = a_m(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_m),$$

Potom

$$R(x) = \frac{L_1}{(x-\lambda_1)} + \frac{L_2}{(x-\lambda_2)} + \dots + \frac{L_m}{(x-\lambda_m)},$$

kde

$$L_i = \frac{P_n(\lambda_i)}{Q'_m(\lambda_i)},\ i = 1,2,\dots,m.$$

Příklad 9 *Rozložte na parciální zlomky racionální lomenou funkci*

$$R(x) = \frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2+x-6)}.$$

Řešení: Rozložíme jmenovatele na součin kořenových činitelů.

$$(x^2-1)(x^2+x-6) = (x+1)(x-1)(x+3)(x-2).$$

Všechny kořeny jsou reálné prosté. Rozklad bude mít tvar

$$\frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2+x-6)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+3} + \frac{D}{x-2}.$$

Po vynásobení rovnice jmenovatelem $(x^2-1)(x^2+x-6)$ dostaneme

$$x^2+1 = A(x-1)(x+3)(x-2) + B(x+1)(x+3)(x-2) + C(x+1)(x-1)(x-2)+$$

$$+D(x+1)(x-1)(x+3).$$

Do poslední rovnice postupně dosazujeme jednotlivé kořeny. Pro $x_1 = -1$ dostaneme po dosazení:

$$(-1)^2 + 1 = A(-1-1)(-1+3)(-1-2) + B(-1+1)(-1+3)(-1-2) + C \cdot 0 + D \cdot 0,$$

$$2 = A(-2)(2)(-3),$$

$$A = \frac{1}{6}.$$

Pro $x = 1$:

$$1 + 1 = A(1-1)(1+3)(1-2) + B(1+1)(1+3)(1-2) + C \cdot 0 + D \cdot 0,$$

$$2 = B(2)(4)(-1),$$

$$B = -\frac{1}{4}.$$

Pro $x = -3$:

$$(-3)^2 + 1 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C(-3+1)(-3-1)(-3-2) + D \cdot 0,$$

$$10 = C(-2)(-4)(-5),$$

$$C = -\frac{1}{4}.$$

Pro $x = 2$:

$$2^2 + 1 = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D(2+1)(2-1)(2+3),$$

$$5 = D(3)(1)(5),$$

$$D = \frac{1}{3}.$$

Konečný rozklad má tedy tvar

$$\frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2+x-6)} = \frac{1}{6(x+1)} - \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+3)} + \frac{1}{3(x-2)}.$$

Kapitola 2

Matice a determinanty. Soustavy lineárních rovnic a jejich řešení.

2.1 Matice

Definice 14 *Nechť m, n jsou přirozená čísla. Jestliže každé uspořádané dvojici $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ přiřadíme prvek $a_{ij} \in \mathbb{R}$, obdržíme reálnou matici typu (m, n) nad $\mathbb{R}$. Čísla i, j jsou indexy , i je řádkový a j je sloupcový index.*

Matice zapisujeme jako

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matice budeme označovat velkými písmeny.
Speciální typy matic:

Matice řádková $$B = (a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Matice sloupcová $$C = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Matice diagonální $$a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j, \quad D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Prvky a_{ii} $i = 1, 2, \dots, \min(m, n)$ tvoří hlavní diagonálu. Matice D je typu (m, m), obecně může mít diagonální matice buď ještě další sloupce, v nichž budou samé nuly, a nebo další řádky, v nichž budou opět samé nuly.
Jestliže $m = n$, potom mluvíme o čtvercové matici řádu m.

Matice jednotková
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice jednotková je tedy čtvercová diagonální matice, která má na hlavní diagonále samé jedničky.

Matice nulová $\mathcal{O} = (a_{ij}),\ a_{ij} = 0\ \forall i, j.$

Matice transponovaná
$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matice symetrická $a_{ij} = a_{ji}\ \forall i, j.$

Matice téhož typu (m, n) nad $\mathbb{R}$ budeme značit $\mathbb{R}_{m,n}$.

Definice 15 *Matice $A = (a_{ij})$ je rovna matici $B = (b_{kl})$, jsou-li obě matice stejného typu a stejnolehlé prvky se sobě rovnají, tj. $A \in \mathbb{R}_{m,n},\ B \in \mathbb{R}_{m,n},\ a_{ij} = b_{ij},\ \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$.*

Definice 16 *Součtem dvou matic $A, B \in \mathbb{R}_{m,n}$ je matice $C \in \mathbb{R}_{m,n}$ taková, že $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
Číselným násobkem $\alpha \in \mathbb{R}$ matice $A \in \mathbb{R}_{m,n}$ je matice $B \in \mathbb{R}_{m,n}$ taková, že $b_{ij} = \alpha a_{ij}$.
Lineární kombinací matic $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathbb{R}_{m,n}$ s koeficienty $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ nazveme matici $A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k$.*

Definice 17 *Mějme rovnost*

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k = \mathcal{O} \tag{2.1.1}$$

*kde $\mathcal{O}$ je nulová matice. Matice $A_1, A_2, \dots, A_k$ nazveme lineárně závislé, pokud $\exists \lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, k$ a rovnost (2.1.1) platí.
Matice $A_1, A_2, \dots, A_k$ nazveme lineárně nezávislé, pokud rovnost (2.1.1) platí tehdy a jen tehdy, když $\lambda_i = 0$ pro $\forall i = 1, 2, \dots, k$.*

Důsledek 5 *Jsou-li $A_1, A_2, \dots, A_k$ lineárně závislé, potom alespoň jedna z nich je lineární kombinací zbývajících.*

Je-li některá z matic $A_1, A_2, \dots, A_k$ lineární kombinací zbývajících, jsou matice $A_1, A_2, \dots, A_k$ lineárně závislé.

Je-li některá z matic $A_1, A_2, \dots, A_k$ nulová, jsou matice $A_1, A_2, \dots, A_k$ lineárně závislé.

Příklad 10 *Matice* $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ *jsou lineárně závislé, protože platí* $A_1 + 2A_2 - A_3 = \mathcal{O}$.

Příklad 11 *Určete lineární závislost či nezávislost matic*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Sestavíme si lineární kombinaci těchto vektorů podle definice 17:

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dosadíme

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Srovnáním stejnolehlých prvků dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0, \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0, \\ \lambda_3 &= 0, \end{aligned}$$

která má řešení $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. *Podle definice 17 jsou matice* A_1, A_2, A_3 *lineárně nezávislé.*

2.2 Determinant

Definice 18 *Permutace je zobrazení množiny* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *na sebe.*

Definice 19 *Inverzí v permutaci* $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ *rozumíme každý výskyt takové dvojice čísel, že větší stojí před menším, tj. vlevo od něj.*

Příklad 12 *Permutace* $(2, 3, 1)$ *má dvě inverze* $2 — 1$ *a* $3 — 1$.

Definice 20 *Determinant čtvercové matice A řádu n je číslo*

$$det\,A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1,j_2,\dots,j_n)} (-1)^{t(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n},$$

kde sčítáme přes všechny permutace $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ a $t(j)$ je rovno počtu inverzí v permutaci $(j_1, j_2, \dots, j_n)$.

Příklad 13 **Křížové pravidlo** *pro výpočet determinantu matice druhého řádu:*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Příklad 14 **Sarrusovo pravidlo** *pro výpočet determinantu matice třetího řádu:*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = aek + bfg + cdh - ceg - afh - bdk.$$

Poznámka 1 *Pro determinanty matic vyšších řádů podobný vzorec neexistuje.*

Věta 2.2.1 **Vlastnosti determinantů:**

1. *V definičním vyjádření determinantu matice A se vyskytuje člen $(a_{i_1j_1} a_{i_2j_2} \dots a_{i_nj_n})$ se znaménkem $(+)$ pokud mají permutace $(i_1, i_2, \dots, i_n), (j_1, j_2, \dots, j_n)$ současně sudý počet inverzí a nebo současně lichý počet inverzí; a se znaménkem $(-)$ pokud má jedna permutace sudý a druhá lichý počet inverzí.*

2. $det\,A\ = det\,(A^T)$*, t.j. ekvivalence řádků a sloupců.*

3. *Záměnou dvou sloupců matice A se hodnota determinantu změní na opačnou.*

4. *Determinant matice, která má dva stejné sloupce, je roven nule.*

5. *Společný násobek všech prvků sloupce se může vytknout před determinant.*

6. *Nechť prvky s-tého sloupce matice A jsou lineární kombinace prvků tvaru $a_{is} = \beta b_{is} + \gamma c_{is}$, potom $|A| = \beta|A_b| + \gamma|A_c|$, kde matici A_b získáme z matice A nahrazením s-tého sloupce prvky b_{is} a ponecháním ostatních beze změny a matici A_c získáme obdobně nahrazením s-tého sloupce matice A prvky c_{is} a ponecháním ostatních beze změny.*

7. *Jestliže některý sloupec matice A je lineární kombinací zbývajících, potom $|A| = 0$.*

8. *Hodnota determinantu se nezmění, pokud přičteme k jednomu sloupci lineární kombinaci zbývajících.*

9. *Determinant diagonální matice je roven součinu prvků na hlavní diagonále.*

Definice 21 *Nechť v matici A řádu n vynecháme s-tý sloupec a k-tý řádek. Zbývající prvky tvoří matici řádu $(n-1)$ a její determinant nazveme minorem M_{ks} prvku a_{ks}.*

Definice 22 *Algebraickým doplňkem A_{ks} prvku a_{ks} nazveme $A_{ks} = (-1)^{k+s}M_{ks}$.*

Věta 2.2.2 Laplaceova věta o rozvoji determinantu.
Pro každou čtvercovou matici A a každé $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí

$$|A| = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{nk}A_{nk}.$$

Důsledek 6 *Vzhledem k rovnoprávnosti řádků a sloupců platí $\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$*

$$|A| = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn}.$$

Příklad 15 *Určete hodnotu deterninantu matice A,*

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 5 & -7 & 4 \\ -7 & 3 & -9 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & 5 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Násobky druhého sloupce budeme přičítat ke zbývajícím tak, abychom ve třetím řádku dostali nuly. Dvojnásobek druhého sloupce přičteme k prvnímu sloupci, ke třetímu sloupci přičteme druhý a od čtvrtého sloupce odečteme druhý sloupec.

$$|A| = \begin{vmatrix} -10 & 5 & -7 & 4 \\ -7 & 3 & -9 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & 5 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

Rozvineme determinant podle třetího řádku a potom podle posledního sloupce:

$$= (-1)^{(3+2)}1 \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & -6 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1)(-1)^{(1+3)} \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 28$$

Poznámka 2 *Při výpočtu je vhodné si nejprve zapsat sloupec (řádek), jehož násobky budeme přičítat ke zbývajícím. Zapisujeme jej na jeho místo, protože nemůžeme měnit pořadí jednotlivých sloupců, aniž by došlo i ke změně hodnoty determinantu. Snížíme tím možnost, že se nechtěně dopustíme chyby.*

Věta 2.2.3 *Pro každou čtvercovou matici A řádu n a pro každou dvojici různých indexů $k, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $k \neq l$, platí*

$$a_{1k}A_{1l} + a_{2k}A_{2l} + \cdots + a_{nk}A_{nl} = 0,$$

$$a_{k1}A_{l1} + a_{k2}A_{l2} + \cdots + a_{kn}A_{ln} = 0.$$

2.3 Hodnost matice

Definice 23 *Nechť* $A \in \mathbb{R}_{m,n}$, $k \le \min(m,n)$. *Vybereme v matici* A *libovolně* k *řádků a* k *sloupců. Elementy stojící na průsečících těchto řádků a sloupců tvoří matici řádu* k. *Její determinant nazveme minorem* k*-tého řádu matice* A.

Důsledek 7 *Minorů* k*-tého řádu matice* $A \in \mathbb{R}_{m,n}$, $k \le \min(m,n)$ *můžeme vytvořit celkem* $\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

Příklad 16 *Mějme matici*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Můžeme z ní vytvořit celkem 12 minorů prvního řádu, 18 minorů druhého řádu a 4 minory třetího řádu. Všechny minory třetího řádu jsou přitom nulové.

Definice 24 *Hodnost nulové matice je rovna nule.*
Hodnost nenulové matice A *je rovna* k, *jestliže existuje nenulový minor řádu* k *a všechny minory vyšších řádů, pokud existují, jsou rovny nule. Libovolný nenulový minor řádu* k *nazveme bázovým a jeho sloupce (řádky) nazveme bázovými sloupci (řádky).*

Věta 2.3.1 *Libovolný sloupec matice* A *je lineární kombinací bázových sloupců.*

Věta 2.3.2 *Má-li matice* A *hodnost* h, *má potom právě* h *lineárně nezávislých sloupců a naopak, má-li matice* A *právě* h *lineárně nezávislých sloupců, potom má hodnost* h.

Důsledek 8 *Determinant čtvercové matice* A *je nenulový právě tehdy, když všechny sloupce jsou lineárně nezávislé.*

Definice 25 *Za elementární úpravy matice* A *prohlásíme*

1. *Přechod od matice* A *k matici transponované* A^T.
2. *Vzájemnou výměnu dvou řádků.*
3. *Vynásobení všech prvků v jednom řádku nenulovým číslem.*
4. *Přičtení k jednomu řádku lineární kombinace zbývajících řádků.*
5. *Vynechání nulového řádku.*

Věta 2.3.3 *Elementární úpravy nemění hodnost matice.*

Definice 26 *Matici* $A \in \mathbb{R}_{m,n}$ *nazveme horní trojúhelníkovou maticí, když* $a_{ij} = 0\ \forall i > j > \min(m,n)$. *Matici* A *nazveme dolní trojúhelníkovou maticí, když* $a_{ij} = 0\ \forall i < j < \min(m,n)$.

Důsledek 9 *Postupným užitím elementárních úprav lze každou matici převést na trojúhelníkovou matici. Tento postup se nazývá Gaussova eliminační metoda.*

Postupným užitím elementárních úprav lze každou matici převést na diagonální matici. Tento postup se nazývá Jordanova eliminační metoda.

Determinant trojúhelníkové matice řádu n je roven součinu prvků na hlavní diagonále.

Příklad 17 *Určit hodnost matice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: První řádek vynásobený (-2) přičteme ke druhému, první řádek vynásobený (-3) přičteme ke třetímu a první řádek vynásobený (-4) přičteme k poslednímu řádku.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & -4 & -6 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 15 \\ 0 & 0 & -10 & -11 & 21 \end{pmatrix}.$$

První a poslední řádek opíšeme, třetí přičteme ke druhému a zapíšeme třetí řádek jako druhý

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 15 \\ 0 & 0 & -4 & -12 & 27 \\ 0 & 0 & -10 & -11 & 21 \end{pmatrix}.$$

První tři řádky necháme beze změny, poslední řádek násobíme (-4) a přičteme k němu desetinásobek třetího řádku

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 15 \\ 0 & 0 & -4 & -12 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & -76 & 186 \end{pmatrix}.$$

Matice A je převedena na trojúhelníkový tvar, má čtyři nenulové rádky, první čtyři řádky a první čtyři sloupce tvoří nenulový minor řádu 4 (jeho hodnota je 304), hodnost matice A je proto rovna čtyřem.

2.4 Maticová algebra

Definice 27 *Součinem matice $A \in \mathbb{R}_{m,n}$ a matice $B \in \mathbb{R}_{n,p}$, v uvedeném pořadí, je matice $C \in \mathbb{R}_{m,p}$ pro kterou platí*

$$C = AB, \quad C = (c_{ij}), \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, p.$$

Poznámka 3 *Násobení matic není komutativní, t.j. existují takové matice A, B, že platí:*

$$AB \neq BA,$$

a nebo některý ze součinů AB či BA není definován.

Příklad 18 *Nechť $A \in \mathbb{R}_{2,3}$ a $B \in \mathbb{R}_{3,4}$. Potom součin AB existuje, ale součin BA není definován.*

Důsledek 10 *Součin matic A a B je definován právě tehdy, když počet sloupců matice A je roven počtu řádků matice B.*

Příklad 19 *Mějme dány matice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Potom

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}, A\ B \neq BA.$$

Příklad 20

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Máme případ, že $A \neq \mathcal{O}, B \neq \mathcal{O}$, ale $AB = \mathcal{O}$.

Jedná se o situaci, která nemá obdobu v oboru reálných čísel. Nelze proto přenášet automaticky poznatky z číselných množin do teorie matic.

Věta 2.4.1 *Pro všechny matice $A \in \mathbb{R}_{m,n}, B, C \in \mathbb{R}_{n,p}, D \in \mathbb{R}_{p,q}$ platí*

1. $A(B + C) = AB + AC$,
2. $A(BD) = (AB)D$,
3. $(\alpha A)B = A\ (\alpha B) = \alpha(AB)$,
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

Věta 2.4.2 *Pro každou matici A typu (m, n) platí $AI = A$, kde I je jednotková matice řádu n.*

Důsledek 11 *$IA = A$, kde $I \in \mathbb{R}_{m,m}$.*

Věta 2.4.3 *Nechť A je matice typu m, n, potom součin AA^T je matice symetrická.*

Věta 2.4.4 *Nechť A, B, C jsou čtvercové matice řádu n a nechť platí*

$$AB = CA = I.$$

Potom $B = C$.

Definice 28 *Nechť A, B jsou čtvercové matice řádu n a nechť platí*

$$AB = BA = I.$$

Potom matice B je inverzní maticí k matici A. Označení $B = A^{-1}$.

Příklad 21 *Pro každou matici A nemusí existovat taková matice B, že platí $AB = I$.*

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \gamma & \beta + \delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

To ovšem znamená, že pro tuto matici A neexistuje matice B taková, že po jejich vynásobení dostaneme matici jednotkovou.

Definice 29 *Matice, ke které existuje matice inverzní, se nazývá regulární. V opačném případě mluvíme o matici singulární.*

Věta 2.4.5 *Nechť A,B jsou dvě regulární matice řádu n. Potom*

1. *Součin AB je regulární a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*
2. *Matice A^{-1} je regulární a $(A^{-1})^{-1} = A$.*

Věta 2.4.6 *Nechť A, B jsou čtvercové matice řádu n. Potom $|AB| = |A|\,|B|$.*

Důsledek 12 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.
Matice A je regulární právě tehdy, když její determinant je nenulový.

Definice 30 *Adjungovaná matice k matici A je matice adj $A = (a^*_{ij})$, kde $a^*_{ij} = A_{ji}$.*

Důsledek 13 *Matici adjungovanou získáme, když každý prvek matice A nahradíme jeho algebraickým doplňkem a výslednou matici transponujeme.*

Věta 2.4.7 *Buď A regulární matice. Potom $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adj\ A)$.*

Důsledek 14 $|adj\ A| = |A|^{n-1}$.

Příklad 22 *Inverzní matice pro matici řádu 2.*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad adj\ A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Příklad 23 *Určete inverzní matici k matici A, jestliže*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 1 & -4 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:
Protože $|A| = -16 + 7 + 84 + 10 = 85$, *je matice* A *regulární a tedy k ní existuje matice inverzní. Určíme jednotlivé algebraické doplňky.*

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -17,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 13,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -17,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = 28,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 17,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -8.$$

Potom

$$adj\ A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 28 \\ -17 & -17 & 17 \\ 13 & -2 & -8 \end{pmatrix} \qquad a \qquad A^{-1} = \frac{1}{85}\begin{pmatrix} -3 & 7 & 28 \\ -17 & -17 & 17 \\ 13 & -2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Věta 2.4.8 *Pro výpočet inverzní matice vyšších řádů používáme metodu doplnění s jednotkovou maticí: Vedle matice* A *(vpravo) napíšeme jednotkovou matici téhož řádu a pomocí řádkových elementárních úprav převedeme matici* $(A|I)$ *na tvar, kdy vlevo bude matice jednotková. Potom vpravo bude matice inverzní*

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . & . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \sim (I|A^{-1})$$

Příklad 24 *Určete inverzní matici k matici* A, *jestliže*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Zapíšeme vedle sebe matici A *a matici jednotkovou. Od prvního řádku odečteme druhý:*

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Násobky prvního řádku odečítáme od zbývajících, poté odečítáme násobek druhého řádku od třetího:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -13 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Nyní odečítáme násobky třetího řádku od zbývajících a poté sečteme druhý a první řádek:

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & -3 & 11 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 18 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -8 & 29 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 18 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right).$$

Tedy pro matici A je inverzní matice

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poznámka 4 *Není nutné předem prověřovat regularitu matice A. Pokud matice A není regulární, tak pomocí řádkových úprav získáme v levé polovině nulový řádek. Provádíme totiž stejné úpravy jako při zjišťování hodnosti matice. Výpočet končí a říkáme, že matice inverzní není definována.*

Příklad 25 *Určete inverzní matici k matici B, jestliže*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Zapíšeme vedle sebe matici A a matici jednotkovou. Násobky prvního řádku odečítáme od zbývajících:

$$(B|I) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Sečteme druhý a třetí řádek:

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Vlevo jsme dostali nulový rádek. Protože jsme použili pouze úpravy, které nemění hodnost matice, je hodnost matice B rovna 2. Matice B je proto singulární a inverzní matice k matici B neexistuje.

2.5 Soustavy lineárních rovnic – základní pojmy

Definice 31 *Rovnice $Ax = b$, kde $A \in \mathbb{R}_{m,n}$, $b \in \mathbb{R}_{m,1}$, $x \in \mathbb{R}_{n,1}$ se nazývá soustava lineárních (algebraických) rovnic.*
V rozepsaném tvaru máme

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{2.5.1}$$

A je matice koeficientů, b je sloupec pravých stran, x je sloupec neznámých,

matice $(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}$ *se nazývá matice rozšířená.*

Každý sloupec (sloupcová matice) α pro který platí $A\alpha = b$ se nazývá řešením soustavy (2.5.1).

Definice 32 *Soustava (2.5.1) je řešitelná, má-li aspoň jedno řešení.*
Soustava (2.5.1) je jednoznačně řešitelná, má-li právě jedno řešení.
Soustava (2.5.1) je víceznačně řešitelná, má-li více než jedno řešení.

Definice 33 *Soustava lineárních algebraických rovnic se nazývá homogenní, jestliže je tvaru*

$$Ax = \mathcal{O}, \tag{2.5.2}$$

kde $\mathcal{O}$ je nulový sloupec. V opačném případě mluvíme o nehomogenní soustavě.

Definice 34 *Je-li $Ax = b$ nehomogenní soustava, pak přidruženou homogenní soustavou rozumíme soustavu $Ax = \mathcal{O}$ (t.j. homogenní soustavu se stejnou maticí koeficientů jakou má nehomogenní soustava).*

Příklad 26 *Mějme dánu nehomogenní soustavu*

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 4x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Přidružená homogenní soustava má tvar

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

2.6 Řešení soustav lineárních algebraických rovnic

Věta 2.6.1 *Nechť soustava $Ax = b$ má regulární matici koeficientů. Potom má tato soustava právě jedno řešení. Můžeme je určit použitím "***Cramerova pravidla***" : k-tý člen řešení je zlomek, v jehož jmenovateli je determinant matice koeficientů A a v čitateli determinant matice D_k, která vznikne z matice A tak, že k-tý sloupec nahradíme sloupcem pravých stran soustavy* (2.5.1)*, ostatní sloupce ponecháme beze změny.*

Příklad 27 *Najít řešení soustavy rovnic*

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 4x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Řešení: Určíme determinant matice koeficientů

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 14$$

Determinant matice A je nenulový, soustava je tedy jednoznačně řešitelná. Spočítáme determinanty matic D_i, kde matice D_i vznikne z matice A nahrazením i-tého sloupce sloupcem pravých stran naší soustavy.

$$|D_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 14, \quad |D_2| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -28, \quad |D_3| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Potom $x_i = \frac{|D_i|}{|A|}$, takže máme

$$x_1 = \frac{14}{14} = 1, \quad x_2 = \frac{-28}{14} = -2, \quad x_3 = \frac{0}{14} = 0.$$

Vyhodnocení: Cramerovy vzorce nám sice dávají přesné řešení, ale je zapotřebí pro ně vypočítat $(n+1)$ determinantů n-tého řádu. Pro rozsáhlejší soustavy je jejich použití problematické, protože ani s pomocí výpočetní techniky nejsme schopni určit přesně hodnoty determinantů. Cramerovy vzorce navíc předpokládají regularitu matice koeficientů. Nedají se proto použít pro libovolnou soustavu.

Věta 2.6.2 Frobeniova.
Soustava (2.5.1) je řešitelná právě tehdy, když hodnost matice koeficientů se rovná hodnosti matice rozšířené.

Důsledek 15 *Je-li soustava (2.5.1) řešitelná, t.j. $h(A) = h(A|b) = h$, pak pro $h = n$ má soustava (2.5.1) právě jedno řešení a pro $h < n$ má soustava (2.5.1) nekonečně mnoho řešení, která závisí na $(n-h)$ parametrech.*

Příklad 28 *Řešte soustavu*

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x + y + 2z &= 1 \\ x + y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

Protože $|A| = -2 \neq 0$, jde o kramerovskou soustavu, která má řešení

$$x = -\frac{1}{2}, \ y = 1, \ z = \frac{1}{2}.$$

Příklad 29 *Řešte soustavu*

$$\begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ x+y+2z &= 1 \\ x+y+3z &= 2 \end{aligned}$$

$|A| = 0$, *proto nemůžeme použít Cramerových vzorců.*

$$h(A) = 2,\ h(A|b) = 3 \Rightarrow h(A) \neq h(A|b).$$

Podle věty 2.6.2 nemá soustava řešení.

Příklad 30 *Řešte soustavu*

$$\begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ x+y+2z &= 1 \\ 2x+2z+4z &= 2 \end{aligned}$$

$|A| = 0$, *proto nemůžeme použít Cramerových vzorců. Dále*

$$h(A) = 2,\ h(A|b) = 2 \Rightarrow h(A) = h(A|b),$$

řešení závisí na jednom parametru $t \in \mathbb{R}$*:*

$$\begin{aligned} x &= 1-t \\ y &= t \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Věta 2.6.3 *Homogenní soustava* (2.5.2) *je vždy řešitelná.*

Definice 35 *Nulové řešení soustavy (2.5.2) nazveme triviálním.*

Věta 2.6.4 *Homogenní soustava* (2.5.2) *má netriviální řešení právě tehdy, když hodnost matice koeficientů je menší než počet neznámých.*

Věta 2.6.5 *Nechť* u, v *jsou řešením soustavy* (2.5.2)*. Potom i jejich libovolná lineární kombinace* $\alpha u\ + \beta v$ *je řešením soustavy* (2.5.2)*.*

Definice 36 *Maximální počet lineárně nezávislých řešení soustavy (2.5.2) nazveme fundamentální soustavou řešení soustavy (2.5.2).*

Věta 2.6.6 *Každá víceznačně řešitelná soustava* (2.5.2) *má vždy fundamentální soustavu řešení.*

Příklad 31 *Řešte homogenní soustavu rovnic*

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 7x_5 &= 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 11x_5 &= 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 - 13x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Řešení: Koeficienty soustavy si zapíšeme do matice a pomocí elementárních řádkových úprav si matici převedeme na stupňovitý tvar.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & -27 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Máme dvě rovnice o pěti neznámých. Volíme proto tři parametry. Neznámé, které stojí na začátku řádku, jehož předchozí koeficienty jsou nulové, můžeme dopočítat. Zbývající volíme jako parametry. Zvolme $x_2 = 3s$, $x_4 = 3t$, $x_5 = 3u$, kde $s, t, u \in \mathbb{R}$. Potom

$$x = \begin{pmatrix} -2s - 2t + 8u \\ 3s \\ -9u \\ 3t \\ 3u \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Tři sloupcové matice vpravo pak představují fundamentální soustavu řešení, protože pokud je zapíšeme jako sloupce do matice, tak druhý, čtvrtý a pátý řádek nám vytvářejí nenulový minor řádu 3.

Věta 2.6.7 *Nechť p, q jsou řešení soustavy* (2.5.1). *Potom $(p - q)$ je řešením přidružené homogenní soustavy.*

Důsledek 16 *Součet řešení soustavy (2.5.1) a řešení přidružené homogenní soustavy je řešením soustavy (2.5.1).*

Důsledek 17 *Všechna řešení soustavy (2.5.1) získáme jako součet jednoho (parciálního) řešení soustavy (2.5.1) a fundamentální soustavy řešení přidružené homogenní soustavy.*

2.7 Gaussova eliminační metoda

Definice 37 *Dvě řešitelné soustavy lineárních rovnic se nazývají ekvivalentní, jestliže mají stejnou množinu řešení.*

Poznámka 5 *Dvě ekvivalentní soustavy mohou mít různý počet rovnic, ale musí mít stejný počet neznámých.*

Mějme dvě takové soustavy $Ax = b, \qquad A'x = b'$.
Potom z podmínek řešitelnosti plyne, že $h(A) = h(A|b) = h(A') = h(A'|b')$.
Protože mají stejnou množinu řešení, tak platí: $A\alpha = b \Leftrightarrow A'\alpha = b'$.
Potom konečným počtem řádkových elementárních úprav lze matici $(A|b)$ převést na matici $(A'|b')$. Nelze kombinovat řádkové a sloupcové úpravy. Můžeme používat pouze řádkové úpravy a ze sloupcových pouze výměnu sloupců v matici A, což je vlastně přeznačení proměnných.
Pomocí povolených elementárních úprav si upravíme soustavu $Ax = b$ na tvar

$$\begin{array}{rcl}
c_{1,1}y_1 + c_{1,2}y_2 + \cdots + c_{1,h}y_h + c_{1,h+1}y_{h+1} + \cdots + c_{1,n}y_n & = & d_1 \\
c_{2,2}y_2 + \cdots + c_{2,h}y_h + c_{2,h+1}y_{h+1} + \cdots + c_{2,n}y_n & = & d_2 \\
\cdots\cdots & & \cdots \\
c_{h,h}y_h + c_{h,h+1}y_{h+1} + \cdots + c_{h,n}y_n & = & d_h
\end{array}$$

kde $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ je vhodná permutace proměnných $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
Je-li $h = n$ má soustava právě jedno řešení — jde o kramerovskou soustavu.
Je-li $h < n$, potom proměnné $y_{h+1}, \ldots, y_n$ prohlásíme za parametry a soustavu upravíme na tvar

$$\begin{array}{rcl}
c_{1,1}y_1 + c_{1,2}y_2 + \cdots + c_{1,h}y_h & = & d_1 - c_{1,h+1}y_{h+1} - \cdots - c_{1,n}y_n \\
c_{2,2}y_2 + \cdots + c_{2,h}y_h & = & d_2 - c_{2,h+1}y_{h+1} - \cdots - c_{2,n}y_n \\
\cdots\cdots & & \cdots \\
c_{h,h}y_h & = & d_h - c_{h,h+1}y_{h+1} - \cdots - c_{h,n}y_n
\end{array} \tag{2.7.1}$$

Tato soustava je ekvivalentní s původní soustavou $Ax = b$ a každé volbě parametrů $y_{h+1}, \ldots, y_n$ odpovídá právě jedno řešení. Parametrů je celkem $(n - h)$. Jestliže za prvky $y_{h+1}, \ldots, y_n$ bereme sloupce regulární matice řádu $(n - h)$, potom bereme za parametry lineárně nezávislé prvky a obdržíme obecné řešení soustavy (2.5.1).
Tento postup se nazývá Gaussova eliminační metoda.

Jestliže budeme dále pokračovat v řádkových úpravách, můžeme soustavu (2.7.1) upravit na tvar

$$\begin{array}{rcl}
y_1 + 0y_2 + \cdots + 0y_h & = & g_1 - f_{1,h+1}y_{h+1} - \cdots - f_{1,n}y_n \\
y_2 + \cdots + 0y_h & = & g_2 - f_{2,h+1}y_{h+1} - \cdots - f_{2,n}y_n \\
\cdots\cdots & & \cdots \\
y_h & = & g_h - f_{h,h+1}y_{h+1} - \cdots - f_{h,n}y_n
\end{array}$$

zde máme na hlavní diagonále vlevo jednotky a zbývající prvky nalevo jsou nulové. Tento postup se nazývá Jordanova eliminace.

Příklad 32 *Řešte soustavu*

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5 &= 1\\ -2x_1+3x_2+4x_3+5x_4+6x_5 &= 2\\ -3x_1+4x_2+5x_3+6x_4+7x_5 &= 3\\ -4x_1+5x_2+6x_3+7x_4+8x_5 &= 4 \end{aligned}$$

Řešení: Zapíšeme rozšířenou matici soustavy a pomocí elementárních řádkových úprav ji převedeme na trojúhelníkový tvar.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1&2&3&4&5&1\\ -2&3&4&5&6&2\\ -3&4&5&6&7&3\\ -4&5&6&7&8&4 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1&2&3&4&5&1\\ 0&7&10&13&16&4\\ 0&10&14&18&22&6\\ 0&13&18&23&28&8 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1&2&3&4&5&1\\ 0&7&10&13&16&4\\ 0&3&4&5&6&2\\ 0&6&8&10&12&4 \end{array}\right)\sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1&2&3&4&5&1\\ 0&1&2&3&4&0\\ 0&3&4&5&6&2\\ 0&0&0&0&0&0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1&2&3&4&5&1\\ 0&1&2&3&4&0\\ 0&0&-2&-4&-6&2\\ 0&0&0&0&0&0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1&2&3&4&5&1\\ 0&1&2&3&4&0\\ 0&0&1&2&3&-1\\ 0&0&0&0&0&0 \end{array}\right).$$

Získali jsme soustavu tří rovnic o pěti neznámých

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5 &= 1\\ x_2+2x_3+3x_4+4x_5 &= 0\\ x_3+2x_4+3x_5 &= -1 \end{aligned}$$

Zvolíme dva parametry $x_4=s, x_5=t$, kde $s,t\in\mathbb{R}$. Potom

$$\begin{aligned} x_3 &= -1-2x_4-3x_5=-1-2s-3t\\ x_2 &= -2x_3-3x_4-4x_5=2+s+2t\\ x_1 &= 1-2x_2-3x_3-4x_4-5x_5=0 \end{aligned}$$

Řešením naší soustavy je $x=(0,2+s+2t,-1-2s-3t,s,t)^T$.
Často bývá vhodnější pokračovat dále v maticových úpravách a převést matici na diagonální tvar. V našem případě budeme mít

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1&2&3&4&5&1\\ 0&1&2&3&4&0\\ 0&0&1&2&3&-1\\ 0&0&0&0&0&0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1&2&0&-2&-4&4\\ 0&1&0&-1&-2&2\\ 0&0&1&2&3&-1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&-1&-2&2\\ 0&0&1&2&3&-1 \end{array}\right).$$

Potom

$$x_1=0, x_2=2+x_4+2x_5, x_3=-1-2x_4-3x_5$$

a analogicky jako v předchozím případě si volíme dva parametry x_4 a x_5 a dostaneme stejný výsledek. $(0,2,-1,0,0)^T$ tvoří partikulární řešení a $(0,1,-2,1,0)^T,(0,2,-3,0,1)^T$ je fundamentální soustava řešení přidružené homogenní soustavy.

Kapitola 3

Vektorové prostory

3.1 Vektorový prostor

Definice 38 *Nechť L je množina a nechť máme definované operace $+ : L \times L \to \mathbb{R}$ a $\cdot : \mathbb{R} \times L \to L$, které splňují axiomy:*

1. $(x + y) + z = x + (y + z) \qquad \forall x, y, z \in L$ — *asociativita sčítání*
2. $\exists \mathcal{O} \in L : \mathcal{O} + x = x + \mathcal{O} = x \qquad \forall x \in L$ — *existence neutrálního prvku*
3. $\forall x \in L\ \exists x^{-1} \in L : x + x^{-1} = \mathcal{O}$ — *existence inverzního prvku*
4. $x + y = y + x \qquad \forall x, y \in L$ — *komutativita sčítání*
5. $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in L$ — *asociativita pro násobení*
6. $\alpha \cdot (x + y) = (\alpha \cdot x) + (\alpha \cdot y) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y \in L$ — *distributivita I.*
7. $(\alpha + \beta) \cdot x = (\alpha \cdot x) + (\beta \cdot x) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in L$ — *distributivita II.*
8. $1 \cdot x = x \qquad \forall x \in L$

Potom uspořádaná trojice $(L, +, \cdot)$ tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.
Prvky z L budeme nazývat vektory, *prvky z $\mathbb{R}$* skaláry. *Značit budeme vektory malými písmeny latinské abecedy a skaláry malými písmeny řecké abecedy.*

Poznámka 6 *Pro vektorový prostor se používá i název lineární prostor.*

Věta 3.1.1 *Nechť $(L, +, \cdot)$ je vektorový prostor, $\mathcal{O}$ je neutrální prvek z axiomu 2. Potom $\forall a \in L, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ platí:*

1. $0 \cdot a = \mathcal{O}$,
2. $\alpha \cdot \mathcal{O} = \mathcal{O}$,
3. $\alpha \cdot a = \mathcal{O} \iff \alpha = 0 \vee a = \mathcal{O}$,
4. $(-\alpha) \cdot a = (\alpha \cdot a)^{-1}$.

Příklad 33 *1. Množina $\mathbb{R}^2$ všech uspořádaných dvojic reálných čísel spolu s operacemi $+, \cdot$ definovaných následovně $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$, $\alpha\cdot(a,b) = (\alpha\cdot a, \alpha\cdot b)$ tvoří vektorový prostor.*

2. Množina $\{M_{m,n}, +, \cdot\}$ všech matic typu (m,n) s operacemi sčítání matic a násobení matice číslem tvoří vektorový prostor.

Definice 39 *Nechť $(L, +, \cdot)$ je vektorový prostor. Neprázdnou podmnožinu K vektorového prostoru L nazveme podprostorem prostoru L, jestliže je K vektorovým prostorem vzhledem ke stejným operacím jako vektorový prostor $(L, +, \cdot)$.*
Množina K se názývá nosičem podprostoru.

Příklad 34 *1. Množina $\{H_{m,n}, +, \cdot\}$ všech horních trojúhelníkových matic tvoří podprostor v prostoru $\{M_{m,n}, +, \cdot\}$.*

2. Množina $\{(x,0), x \in \mathbb{R}\}$ tvoří podprostor v $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

3. Množina všech řešení homogenní soustavy lineárních algebraických rovnic o n neznámých tvoří podprostor ve vektorovém prostoru $(M_{(n,1)}, +, \cdot)$ sloupcových matic typu $(n,1)$.

4. Množina $\{\mathcal{O}\}$ je podprostorem a nazývá se triviální podprostor.

Věta 3.1.2 *Neprázdná podmnožina K vektorového prostoru $(L, +, \cdot)$ je podprostorem v L, právě když pro $\forall u, v \in K$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ platí:*

$$u + v \ \in K, \ \alpha \cdot u \ \in K.$$

Věta 3.1.3 *Průnik libovolného počtu podprostorů vektorového prostoru $(L, +, \cdot)$ je opět vektorovým podprostorem v L.*

Definice 40 *Buď M podmnožina vektorového prostoru $(L, +, \cdot)$. Průnik všech podprostorů obsahujících M nazveme lineárním obalem množiny M a označíme $\langle M \rangle$.*
Nechť $u_1, u_2, \ldots, u_n$ jsou vektory z vektorového prostoru $(L, +, \cdot)$. Lineární kombinací vektorů u_i nazveme každý vektor tvaru $v = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Věta 3.1.4 *Nechť M je podmnožina vektorového prostoru $(L, +, \cdot)$. Pak platí:*
1) Je-li $M = \emptyset$, je $\langle M \rangle = \mathcal{O}$.
2) Je-li $M \neq \emptyset$, je $\langle M \rangle$ množina všech lineárních kombinací tvaru

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n, \text{ kde } u_i \in M, \ \alpha_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Definice 41 *Podmnožina M vektorového prostoru L se nazývá generující, jestliže $\langle M \rangle \equiv L$.*

Příklad 35 *1. Vektory*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

tvoří generující množinu pro $(M_{2,2}, +, \cdot)$ (vektorový prostor všech matic řádu 2).

2. *Vektory $1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3, x+x^3, x^3-x^2+7$ tvoří generující množinu prostoru všech polynomů stupně nejvýše třetího.*

3. *Vektory $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ tvoří generující množinu ve vektorovém prostoru všech polynomů.*

Věta 3.1.5 *Podmnožina M vektorového prostoru L je generující právě tehdy, když každý vektor z L je lineární kombinací vektorů z M.*

Definice 42 *Vektory $a_1, a_2, \ldots, a_n$ z vektorového prostoru $(L, +, \cdot)$ nad tělesem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ nazveme lineárně nezávislé, jestliže*

$$\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \cdots + \alpha_n \cdot a_n = \mathcal{O} \ \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0,$$

a nazveme je lineárně závislé, jestliže existuje aspoň jeden nenulový koeficient α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ tak, že platí

$$\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \cdots + \alpha_n \cdot a_n = \mathcal{O} \ .$$

Definice 43 *Množina $M \subset L$ je lineárně nezávislá, jestliže každá její konečná neprázdná podmnožina $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ je tvořena lineárně nezávislými vektory.*
Množina $M \subset L$ je lineárně závislá v opačném případě.

Věta 3.1.6 *Nechť $(L, +, \cdot)$ je vektorový prostor. Potom platí:*

1. *Jsou-li prvky $a_1, a_2, \ldots, a_n \in L$ lineárně nezávislé, jsou lineárně nezávislé i prvky $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$, kde $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$.*

2. *Je-li mezi vektory $a_1, a_2, \ldots, a_n \in L$ nulový vektor, jsou vektory $a_1, a_2, \ldots, a_n$ lineárně závislé.*

3. *Jsou-li vektory $a_1, a_2, \ldots, a_n \in L$ lineárně závislé, je aspoň jeden z nich lineární kombinací ostatních.*

4. *Jsou-li vektory $a_1, a_2, \ldots, a_n \in L$ lineárně závislé, potom pro libovolné $a_{n+1} \in L$ jsou lineárně závislé i vektory $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$.*

3.2 Báze, dimenze, souřadnice.

Definice 44 *Podmnožina $\mathcal{B}$ vektorového prostoru $(L, +, \cdot)$ se nazývá báze vektorového prostoru , jestliže množina $\mathcal{B}$ je lineárně nezávislá a $\langle \mathcal{B} \rangle \equiv L$.*
Říkáme také, že báze je lineárně nezávislá generující množina vektorů.

Věta 3.2.1 *Buď $\mathcal{B} = \{a_1, a_2, \dots\}$ báze vektorového prostoru $(L, +, \cdot)$. Pak každý nenulový vektor u lze jednoznačně, až na pořadí, vyjádřit ve tvaru*

$$u = \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \cdots + \alpha_n \cdot a_n,$$

kde $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathcal{B}$ a vektory a_i jsou po dvou různé.

Věta 3.2.2 *V každém netriviálním vektorovém prostoru existuje aspoň jedna báze.*

Definice 45 *Řekneme, že netriviální vektorový prostor $(L, +, \cdot)$ nad $\mathbb{R}$ má konečnou dimenzi, jestliže v L existuje generující množina tvořená konečným počtem vektorů.*

Věta 3.2.3 *Z každé generující množiny vektorového prostoru konečné dimenze lze vybrat bázi.*

Úmluva: Všude dále budeme pod vektorovým prostorem rozumět vektorový prostor konečné dimenze.

Věta 3.2.4 Steinitzova o výměně *Nechť $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ tvoří generující množinu vektorového prostoru $(L, +, \cdot)$, nechť $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ je lineárně nezávislá množina vektorů z $(L, +, \cdot)$. Potom $k \le n$ a při vhodném označení je množina $\{b_1, b_2, \dots, b_k, a_{k+1}, \dots, a_n\}$ generující množinou pro $(L, +, \cdot)$.*

Důkaz: Vektor $b_1 \in L$ a proto jej lze vyjádřit podle věty 3.1.5 jako lineární kombinaci vektorů generující množiny:

$$b_1 = (\alpha_1 \cdot a_1) + (\alpha_2 \cdot a_2) + \cdots + (\alpha_n \cdot a_n), \tag{3.2.1}$$

kde aspoň jeden z koeficientů $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$ je nenulový, neboť b_1 je vektor z lineárně nezávislé množiny a tedy nemůže být nulový. Bez omezení obecnosti můžeme předpokládat, že nenulový koeficient je u vektoru a_1 (v opačném případě provedeme přeznačení vektorů generující množiny). Z rovnice 3.2.1 si vyjádříme a_1:

$$a_1 = \frac{1}{\alpha_1} \cdot [b_1 - (\alpha_2 \cdot a_2) - \cdots - (\alpha_n \cdot a_n)]\,. \tag{3.2.2}$$

Jestliže nyní ve vyjádření libovolného vektoru v jako lineární kombinace prvků generující množiny nahradíme vektor a_1 vztahem (3.2.2), dostaneme vektor v vyjádřený jako lineární kombinaci vektorů $\{b_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$. Potom tyto vektory tvoří novou generující množinu. Vyjádříme si nyní b_2 jako jejich lineární kombinaci:

$$b_2 = (\beta_1 \cdot b_1) + (\beta_2 \cdot a_2) + (\beta_3 \cdot a_3) + \cdots + (\beta_n \cdot a_n), \tag{3.2.3}$$

kde aspoň jeden z koeficientů $\beta_2, \dots, \beta_n$ bude nenulový. Pokud by byly všechny nulové, pak by b_2 bylo násobkem b_1 a to nemůže nastat, protože b_1, b_2 jsou prvky z lineárně nezávislé množiny. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že nenulový koeficient je u a_2. Vyjádříme si z rovnice (3.2.3) vektor a_2:

$$a_2 = \frac{1}{\beta_2} \cdot [b_2 - \beta_1 \cdot b_1 - \beta_3 \cdot a_3 - \dots - \beta_n \cdot a_n]. \tag{3.2.4}$$

A opět každý vektor vyjádřený jako lineární kombinace vektorů generující množiny $\{b_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ záměnou a_2 podle (3.2.4) dostaneme vyjádřený jako lineární kombinaci vektorů $\{b_1, b_2, a_3, \dots, a_n\}$. Pokračujeme dále podle indukce. Počet lineárně nezávislých vektorů musí být menší nebo roven počtu vektorů generující množiny. Tento počet je konečný a proto se po konečném počtu kroků zastavíme. □

Důsledek 18 *Každé dvě báze vektorového prostoru $(L, +, \cdot)$ mají stejný počet prvků a každá lineárně nezávislá podmnožina L s tímto počtem prvků je bází.*

Věta 3.2.5 *Nechť $\mathcal{B} \neq \emptyset$ je podmnožina vektorového prostoru $(L, +, \cdot)$ nad $\mathbb{R}$. Množina $\mathcal{B}$ je bází prostoru L právě tehdy, když každý vektor $v \in L$ se dá jednoznačně vyjádřit (s přesností do pořadí) jako lineární kombinace prvků z $\mathcal{B}$.*

Příklad 36 *Mějme prostor $(M_{2,2}, +, \cdot)$. Dokažte, že jeho bázi tvoří vektory*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Podle předchozí věty stačí ukázat, že každý vektor z $M_{2,2}$ se dá jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinace vektorů A, B, C, D. Mějme libovolný vektor

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

a hledáme koeficienty $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tak, aby platilo

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = X.$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Po dosazení dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma + \delta &= a \\ \beta + \gamma + \delta &= b \\ \gamma + \delta &= c \\ \delta &= d \end{aligned}$$

Jde o nehomogenní soustavu s regulární maticí koeficientů (je to trojúhelníková matice), která je jednoznačně řešitelná pro libovolný tvar pravé strany. To znamená, že libovolný vektor X se dá jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinace prvků A, B, C, D a tedy tyto prvky tvoří bázi.

Definice 46 *Nechť $L \neq \{\mathcal{O}\}$ je vektorový prostor. Dimenzí prostoru L nazveme počet prvků jeho báze. Píšeme $\dim L = n$.*
Triviální vektorový prostor $\mathcal{V} = \{\mathcal{O}\}$ má dimenzi 0.
Vektorový prostor dimenze n budeme značit L_n.

Definice 47 *Nechť uspořádaná množina $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ je bází vektorového prostoru $(L, +, \cdot)$ dimenze n. Potom $\forall x \in L$ platí*

$$x = \alpha_1 \cdot b_1 + \alpha_2 \cdot b_2 + \cdots + \alpha_n \cdot b_n,$$

kde koeficienty α_i jsou určeny jednoznačně. Prvek $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T$ nazveme souřadnicemi vektoru x vzhledem k bázi $\mathcal{B}$.

Věta 3.2.6 *Každý podprostor P vektorového prostoru L konečné dimenze má také konečnou dimenzi $m \leq n$.*

Důsledek 19 *Nechť P je podprostor prostoru L konečné dimenze. Jestliže $\dim P = n$, potom $P \equiv L$.*

Příklad 37 *Ve vektorovém prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ určete v závislosti na parametru α dimenzi lineárního obalu vektorů $a = (\alpha, -4, -1)$, $b = (4, -6, -3)$, $c = (1, 1, -\alpha)$.*
Řešení: Lineární obal množiny vektorů je podprostorem a úloha má smysl. Určíme lineární závislost či nezávislost vektorů a, b, c. Zapíšeme vektory je do matice a pomocí elementárních úprav matici převedeme na stupňovitý tvar:

$$\begin{pmatrix} \alpha & -4 & -1 \\ 4 & -6 & -3 \\ 1 & 1 & -\alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\alpha \\ 4 & -6 & -3 \\ \alpha & -4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\alpha \\ 0 & -10 & 4\alpha - 3 \\ 0 & -4-\alpha & \alpha^2 - 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\alpha \\ 0 & -10 & 4\alpha - 3 \\ 0 & 0 & -6\alpha^2 + 13\alpha - 2 \end{pmatrix}.$$

Rovnice $-6\alpha^2 + 13\alpha - 2 = 0$ má kořeny $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = \frac{1}{6}$, proto $\dim\langle a, b, c\rangle = 2$ pro $\alpha = 2$ a nebo $\alpha = \frac{1}{6}$ a $\dim\langle a, b, c\rangle = 3$ pro $\alpha \neq 2$ a $\alpha \neq \frac{1}{6}$.

3.3 Transformace souřadnic.

Definice 48 *Nechť $(L, +, \cdot)$ je vektorový prostor. Nechť $\mathcal{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ jsou dvě báze tohoto prostoru. Potom prvky báze $\mathcal{B}$ se dají jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinace prvků báze $\mathcal{A}$.*

$$\begin{aligned} b_1 &= \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \cdots + \alpha_{n1}a_n, \\ b_2 &= \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \cdots + \alpha_{n2}a_n, \\ \cdots & \quad \cdots \\ b_n &= \alpha_{1n}a_1 + \alpha_{2n}a_2 + \cdots + \alpha_{nn}a_n, \end{aligned}$$

neboli

$$(b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}\right). \tag{3.3.1}$$

Matici $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{n}$ *nazveme maticí přechodu od báze* $\mathcal{A}$ *k bázi* $\mathcal{B}$*.*

Ve vztahu (3.3.1) máme vpravo formální součin matic, kde první matice je řádková a její prvky jsou vektory a druhá je čtvercová a její prvky jsou skaláry.

Věta 3.3.1 *Matice přechodu je vždy regulární.*

Věta 3.3.2 O transformaci souřadnic.
Nechť máme vektor x *vyjádřený jako lineární kombinaci ve dvou různých bázích* $x = (a_1, a_2, \ldots, a_n)\xi_{\mathcal{A}}$ *a* $x = (b_1, b_2, \ldots, b_n)\xi_{\mathcal{B}}$*. Nechť* $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ *je maticí přechodu. Potom*

$$\xi_{\mathcal{A}} = \left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}\right)\xi_{\mathcal{B}}.$$

Důsledek 20 $(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^{-1} = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$.

Příklad 38 *Nechť v* $(\mathbb{R}^3, +, .)$ *máme dány dvě báze*
$\mathcal{B} = \{(1,0,0,),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\}$, *a* $\mathcal{C} = \{(-1,1,0),\ (1,1,0),\ (0,0,1)\}$.
Určete matici přechodu od báze $\mathcal{B}$ *k bázi* $\mathcal{C}$ *a naopak. Určete* $x_{\mathcal{C}}$, $y_{\mathcal{B}}$, *jestliže*
$x_{\mathcal{B}} = (-1,3,0)^T$, $y_{\mathcal{C}} = (2,4,7)^T$.
Řešení:$\mathcal{B} = \{a,b,c\}$, $\mathcal{C} = \{k,l,m\}$. *Prvky báze* $\mathcal{C}$ *si vyjádříme jako lineární kombinace prvků báze* $\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned} k &= \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c, \\ l &= \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c, \\ m &= \alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c, \end{aligned}$$

To znamená, že musíme řešit tři soustavy rovnic se stejnou maticí koeficientů a různými pravými stranami. Budeme je všechny tři řešit najednou, protože u matice koeficientů bychom prováděli opakovaně stejné úpravy. Zapíšeme si vektory bází $\mathcal{B}$ *i* $\mathcal{C}$ *sloupcově do matice, přitom vektory báze* $\mathcal{B}$ *tvoří matici koeficientů a vektory báze* $\mathcal{C}$ *jsou "pravé strany", které máme ale zapsány v jedné matici. Pomocí řádkových elementárních úprav najdeme řešení:*

$$\left(\begin{array}{ccc|r|c|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|r|c|r} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|r|c|r} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Matice přechodu od báze $\mathcal{B}$ *k bázi* $\mathcal{C}$ *je*

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice přechodu od báze $\mathcal{C}$ k bázi $\mathcal{B}$ bude pak matice inverzní

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \left(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vynásobením nyní dostaneme $x_{\mathcal{C}} = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})x_{\mathcal{B}} = (\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 0)^T$, $y_{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}})y_{\mathcal{C}} = (-4, -1, 7)^T$.

Věta 3.3.3 *Nechť* $\mathcal{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *je báze vektorového prostoru* L*,* M *je regulární matice řádu* n*. Potom* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)M$ *je taktéž báze vektorového prostoru* L *a všechny báze prostoru* L *můžeme získat tímto způsobem.*

Kapitola 4

Skalární, vektorový a smíšený součin

4.1 Skalární součin

Definice 49 *Nechť* $(L, +, \cdot)$ *je vektorový prostor dimenze* n *nad* $\mathbb{R}$. *Zobrazení* $g : L \times L \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto g(x, y)$ *se nazývá skalárním součinem na* L, *jestliže* $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *a* $\forall x, y, z \in L$ *platí:*

1. $g(x, y) = g(y, x)$, *komutativita*
2. $g(x + y, z) = g(x, z) + g(y, z)$, *distributivita*
3. $g(\alpha x, y) = \alpha g(x, y)$, *vytýkání skalárního násobku*
4. $g(x, x) \geq 0$, *přičemž* $g(x, x) = 0$ *pouze pro* $x = \mathcal{O}$. *pozitivní definitnost*

Příklad 39 *Mějme prostor* $(C[a, b], +, \cdot)$ *všech spojitých funkcí definovaných na intervalu* $[a, b]$. *Definujme si zobrazení:*

$$\forall\, u, v \in C[a, b] : \quad g(u, v) = \int_a^b u(x)v(x)dx.$$

Zobrazení g *splňuje všechny požadavky definice 49, a tedy se jedná o skalární součin. Prověřte.*

Důsledek 21 *Platí:*

1. $g(\mathcal{O}, x) = 0 \ \forall x \in L$.
2. $g((\sum\limits_i \alpha_i x_i), (\sum\limits_j \beta_j y_j)) = \sum\limits_i \sum\limits_j \alpha_i \beta_j g(x_i, y_j)$.

Věta 4.1.1 *V libovolném vektorovém prostoru dimenze* n *je možné definovat skalární součin.*

Definice 50 *Vektorový prostor se skalárním součinem se nazývá Eukleidovský vektorový prostor.*
Jako standardní skalární součin na $\mathbb{R}^n$ budeme označovat

$$x \bullet y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Definice 51 *Nechť L je Eukleidovský prostor dimenze n. Normou vektoru $x \in L$ nazveme číslo*

$$\|x\| = \sqrt{g(x,x)} \quad \left(= \sqrt{x \bullet x}\right).$$

Věta 4.1.2 $\forall x, y \in (L_n, +, \cdot)_{\mathsf{R}}$ *platí Cauchyova — Schwarzova nerovnost:*

$$|x \bullet y| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Věta 4.1.3 $\forall x, y \in L$ *platí trojúhelníková nerovnost.*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Důsledek 22 $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ *právě tehdy, když* $|x \bullet y| = \|x\| \cdot \|y\|$.

Definice 52 *Velikost úhlu φ mezi dvěma nenulovými vektory je definována takto:*

$$\cos\varphi = \frac{x \bullet y}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Poznámka 7 *Podle Cauchyovy — Schwarzovy nerovnosti je definice korektní. Čitatel je menší nebo roven jmenovateli. Omezujeme se na $\varphi \in < 0, \pi >$.*

Definice 53 *Prvky $x, y \in L$ nazveme ortogonálními, jestliže platí $x \bullet y = 0$.*

Poznámka 8 *Jde o zobecnění pojmu "kolmost" pro libovolné prostory.*

Věta 4.1.4 *Pro každé dva ortogonální vektory platí Pythagorova rovnost*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Definice 54 *Báze vektorového prostoru se nazývá ortogonální, jestliže je tvořena vektory po dvou ortogonálními.*
Báze vektorového prostoru se nazývá ortonormální, jestliže platí

$$a_i \bullet a_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Důsledek 23 *Jsou-li ve vektorovém prostoru dány nenulové vektory $a_1, a_2, \ldots, a_n$ po dvou ortogonální, pak jsou tyto vektory lineárně nezávislé.*

Věta 4.1.5 Gramova—Schmidtova
V každém netriviálním eukleidovském vektorovém prostoru lze sestrojit ortonormální bázi.

Důkaz: Pomocí matematické indukce. Mějme bázi $\mathcal{A} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Nejdříve vytvoříme ortogonální bázi $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ a pak ji normalizujeme. Každý prvek nové báze $\mathcal{B}$ je roven stejnolehlému prvku staré báze $\mathcal{A}$ a lineární kombinaci již vytvožených prvků nové báze $\mathcal{B}$.

$$b_1 = a_1.$$

$$b_2 = a_2 + \alpha b_1,$$

kde α_1 je neznámý koeficient. Vynásobíme skalárně tuto rovnost vektorem b_1 a protože vektory b_1, b_2 mají být ortogonální, musí platit

$$0 = (a_2 \bullet b_1) + \alpha(b_1 \bullet b_1),$$

$$\alpha = -\frac{a_2 \bullet b_1}{b_1 \bullet b_1}.$$

Určili jsme koeficient α a tím také vektor b_2. Vektor b_2 musí být nenulový, jinak by platilo, že $a_2 = -\alpha_1 b_1 = -\alpha_1 a_1$ a to by byl spor s tvrzením, že a_1, a_2 jsou prvky báze, t.j. jsou lineárně nezávislé. Pokračujeme dále

$$b_3 = a_3 + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2$$

a postupujeme stejně jako v předchozím případě:

$$\beta_i = -\frac{a_3 \bullet b_i}{b_i \bullet b_i}, \ \ i = 1, 2.$$

b_3 opět musí být nenulový. atd. Používáme tedy obecný vztah

$$b_k = a_k + \sum_{j=1}^{k-1} \gamma_j b_j, \ \ k = 1, 2, \dots, n,$$

kde

$$\gamma_j = -\frac{a_k \bullet b_j}{b_j \bullet b_j}.$$

Nakonec provedeme normalizaci

$$c_i = \frac{b_i}{\|b_i\|}$$

a máme ortonormální bázi $\mathcal{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$. □

Poznámka 9 *Stejným způsobem můžeme postupovat i při hledání ortonormální báze podprostoru zadaného generující množinou. Jestliže jsou vektory generující množiny lineárně závislé, objeví se během konstrukce některý z vektorů b_i jako nulový. Pak ovšem nemůže být prvkem báze, proto jej vyloučíme a pokračujeme dále.*

Příklad 40 *Určete ortonormální bázi podprostoru generovaného vektory*

$$a = (1, 1, -1, -1),\ b = (1, -1, 1, 1),\ c = (-1, -2, 0, 1),\ d = (1, -2, 0, 1).$$

Řešení: Hledané ortogonální vektory si označíme k, l, m, n. Potom

$$k = a,$$
$$l = b + \alpha k, \quad \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}, \quad \Rightarrow l = (3, -1, 1, 1).$$
$$m = c + \beta k \ + \gamma l, \quad \Rightarrow \beta = 1,\ \gamma = 0, \quad \Rightarrow m = (0, -1, -1, 0).$$
$$n = d + \delta k + \eta l + \zeta m, \quad \Rightarrow \delta = \frac{1}{2},\ \eta = -\frac{1}{2},\ \zeta = -1, \quad \Rightarrow n = (0, 0, 0, 0).$$

Ortogonální bázi proto tvoří vektory k, l, m.

4.2 Ortogonální průmět.

Definice 55 *Dva podprostory K a M vektorového prostoru L jsou ortogonální, když $\forall x \in K, \forall y \in M : x \bullet y = 0$.*

Důsledek 24 *Nechť K a M jsou ortogonální podprostory. Potom*

$$K \cap M = \mathcal{O} \ \Rightarrow \ K + M = K \oplus M.$$

Definice 56 *Ortogonálním doplňkem podprostoru K nazveme množinu*

$$M = \{x \in (L \setminus K) : \ x \bullet y = 0 \, \forall y \in K\}.$$

Důsledek 25 *Ortogonální doplněk podprostoru doplněný nulovým vektorem je podprostor.*

Příklad 41 *Určete ortogonální doplněk podprostoru*

$$K = \langle a = (-1, 2, 0, 1),\ b = (3, 1, -2, 4),\ c = (-4, 1, 2, -3) \rangle \, .$$

Řešení: Ortogonální doplněk bude tvořen vektory $v = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, pro něž platí

$$v \bullet a = v \bullet b = v \bullet c = 0.$$

Dosazením dostaneme homogenní soustavu rovnic. Matici koeficientů elementárními úpravami převedeme na stupňovitý tvar:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ -4 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -2 & 7 \\ 0 & -7 & 2 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Máme soustavu dvou rovnic o čtyřech neznámých. Řešení bude záviset na dvou parametrech a má tvar $v = (4s - t, 2s - t, 7s, t)$, $s, t \in \mathbb{R}, s^2 + t^2 \neq 0$. (Parametry s, t se nemohou oba současně rovnat nule, protože to bychom dostali nulový vektor a ten nepatří do ortogonálního doplňku.) Tím máme popsán ortogonální doplněk .

Pokud chceme bázi ortogonálního podprostoru M, volíme $s = 1, t = 0$ a $s = 0, t = 1$ a dostaneme $M = \langle (4, 2, 7, 0), (-1, -1, 0, 1) \rangle$.

Definice 57 *Ortogonální průmět vektoru v do podprostoru K je vektor $u \in K$, pro který platí $v = u + z$, kde z je ortogonální k podprostoru K.*

Věta 4.2.1 *Nechť K je podprostor vektorového prostoru L. Potom $\forall v \in L$ můžeme sestrojit jeho ortogonální průmět do podprostoru K.*

Poznámka 10 *Tento postup se využívá v numerické matematice, kde se nazývá "metoda nejmenších čtverců."*

Příklad 42 *V prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ určete ortogonální průmět vektoru $x = (1, 2, 3)$ do podprostoru $K = \langle a, b \rangle$, kde $a = (-1, 1, 1), b = (1, 1, , 1)$.*
Řešení:

$$x = \alpha a + \beta b + z,$$

kde $z \perp a, b$ a tedy $z \bullet a = z \bullet b = 0$.

$$x \bullet a = \alpha(a \bullet a) + \beta(b \bullet a),$$

$$x \bullet b = \alpha(a \bullet b) + \beta(b \bullet b).$$

Dosazením získáme soustavu rovnic

$$3\alpha + \beta = 4,$$

$$\alpha + 3\beta = 6,$$

$$\alpha = \frac{3}{4}, \quad \beta = \frac{7}{4},$$

hledaný průmět u je

$$u = \alpha a + \beta b = \frac{3}{4}(-1, 1, 1) + \frac{7}{4}(1, 1, 1) = (1, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}).$$

Zkouška:

$$z = x - u = (1, 2, 3) - (1, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}) = (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}),$$

potom $z \bullet a = z \bullet b = 0$.

Poznámka 11 *Při výpočtu ortogonálního průmětu musíme počítat se zlomky, pokud nám vyjdou. Zde si nemůžeme dovolit (tak jako při výpočtu ortogonální báze) změnit normu vektoru jeho vynásobením nenulovým číslem.*

4.3 Vektorový počet v E^3 - vektorový a smíšený součin.

Definice 58 *Dvě báze $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ téhož vektorového prostoru L nazveme souhlasně orientované, jestliže matice přechodu od $\mathcal{A}$ k $\mathcal{B}$ má kladný determinant a nesouhlasně orientované v opačném případě.*

Důsledek 26 *Protože $(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^{-1} = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ a pro každou regulární matici M je $|M^{-1}| = |M|^{-1}$, takže obě matice mají determinant buď současně kladný a nebo současně záporný. Tím se množina všech bází vektorového prostoru L rozpadne na dvě disjunktní třídy.*

Každé dvě báze, patřící do stejné třídy, mají matici přechodu s kladným determinantem. Každé dvě báze, patřící různým třídám, mají matici přechodu se záporným determinantem.

Jiné označení - kladné , pravotočivé,E^+.
- záporné, levotočivé, E^-.

V praxi (hlavně technické) se za kladný, pravotočivý systém bere následující:

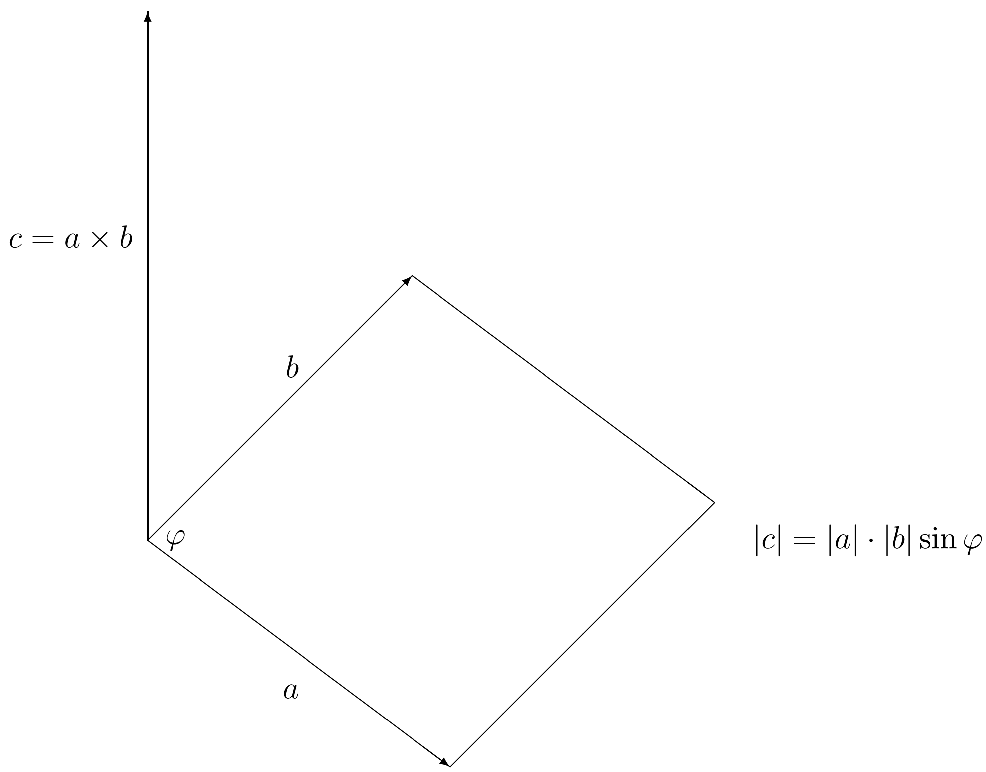
Definice 59 *Mějme dánu soustavu souřadnou $(P, (e_1, e_2, e_3))$. Do roviny (P, e_1, e_2) umístíme hodinky tak,aby ciferník směřoval do poloprostoru v němž leží e_3. Úhel mezi vektory e_1, e_2 musí být menší než π. Přejdeme-li nyní z e_1 na e_2 proti směru hodinových ručiček, tvoří vektory (e_1, e_2, e_3) kladně orientovanou soustavu. V případě přechodu po směru hodinových ručiček jde o záporně orientovanou soustavu.*

Jiná definice: **Pravidlo pravé ruky.**
Vezmeme si menší z obou úhlů, které svírají vektory a a b. Položíme palec pravé ruky na vektor a a ukazováček pravé ruky na vektor b. Jestliže dlaň směřuje do poloprostoru, kde leží vektor c, jsou vektory a, b, c souhlasně orientované. V opačném případě jsou nesouhlasně orientované.

Důsledek 27 *Kanonická báze (i, j, k) prostoru E^3 je pravotočivá (kladná). Přitom $i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0), k = (0, 0, 1)$.*

Definice 60 *Měme orientovaný prostor E^3. Pro každé dva vektory $a, b \in E^3$ definujeme jejich vektorový součin následovně: $a \times b = c$, kde $|c| = |a| \cdot |b| \sin \varphi$ a φ je úhel mezi vektory a, b a trojice $(a, b, a \times b)$ tvoří kladně orientovanou soustavu.*

Důsledek 28 *Geometrický význam vektorového součinu.*



Obr. č. 1

Věta 4.3.1 *Je-li* (e_1, e_2, e_3) *pravotočivá ortonormální báze v* E^3*, pak* $e_i \times e_j = \pm e_k$ *pro každou permutaci* (i, j, k) *z množiny* $\{1, 2, 3\}$*, přičemž znaménko* $(+)$ *se bere pro sudé permutace a znaménko* $(-)$ *pro liché permutace.*

Věta 4.3.2 *Nechť* (i, j, k) *je pravotočivá ortonormální báze v* E^3*.*
Nechť $a = \alpha\, i + \beta\, j + \gamma\, k,\ b = \varepsilon\, i + \zeta\, j + \eta\, k$*. Potom*

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \varepsilon & \zeta & \eta \end{vmatrix}$$

Poznámka 12 *Je to formální determinant. Jeho prvky jsou čísla a vektory. Formálně na něj aplikujeme Sarrusovo pravidlo a získáme správnou hodnotu, která nebude číslem, ale bude vektorem.*

Věta 4.3.3 *Základní vlastnosti vektorového součinu.*

1. $a \times b = -(b \times a)$.

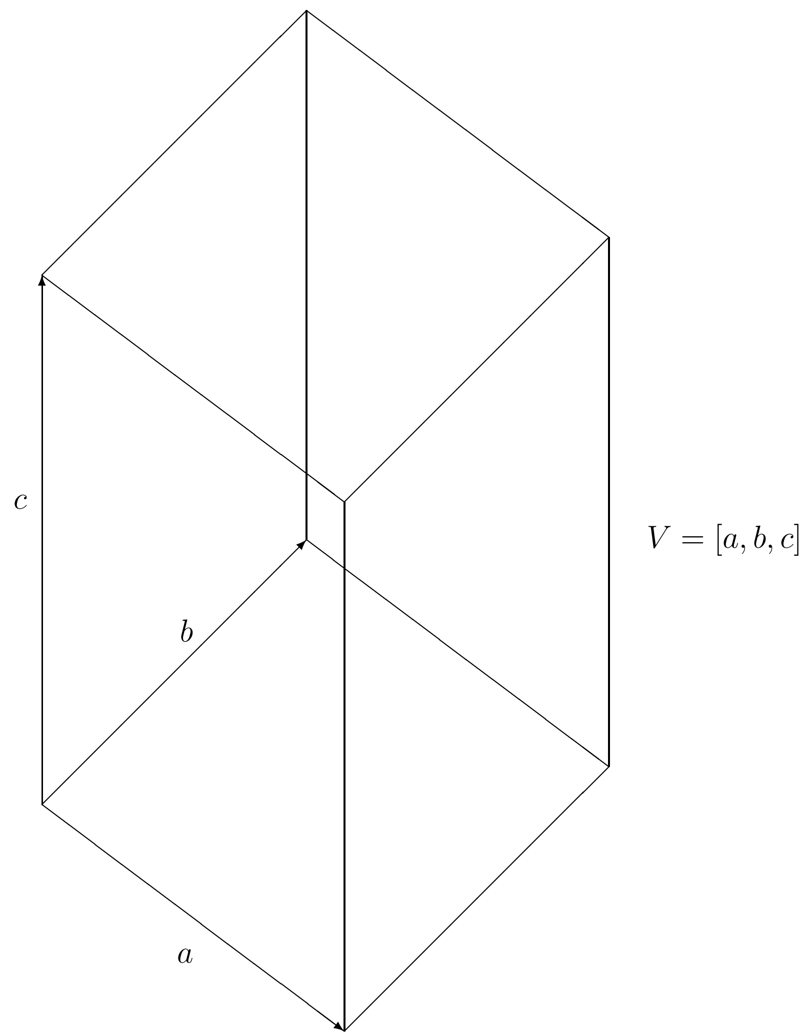
2. $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$.

3. $a \times (\beta\, b) = (\beta\, a) \times b = \beta(a \times b)$.

4. a, b jsou lineárně závislé právě tehdy když $a \times b = \mathcal{O}$.

Definice 61 *Smíšený součin vektorů $a, b, c \in E^3$ je $[a, b, c] = a \bullet (b \times c)$.*

Věta 4.3.4 *Nechť a, b, c jsou lineárně nezávislé vektory z E^3. Potom $\pm[a, b, c]$ je objem rovnoběžnostěnu s hranami a, b, c. Znaménko $(+)$ bereme při kladné orientaci uspořádané trojice a, b, c a znaménko $(-)$ při záporné.*



Obr. č. 2

Věta 4.3.5 *Nechť $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $c = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Potom platí*

$$[a, b, c] = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Věta 4.3.6 *Základní vlastnosti smíšeného součinu:*

1. $[a, b, c] = [b, c, a] = [c, a, b] = -[c, b, a] = -[b, a, c] = -[a, c, b]$.
2. $[\varrho\, a, b, c] = [a, \varrho\, b, c] = [a, b, \varrho\, c] = \varrho\, [a, b, c]$.
3. $[a + b, c, d] = [a, c, d] + [b, c, d]$.
4. *Vektory a, b, c jsou lineárně závislé právě tehdy, když $[a, b, c] = 0$.*

Kapitola 5

Analytická geometrie lineárních a kvadratických útvarů

5.1 Lineární útvary v E^3.

1. Přímka

$X = A + t\mathbf{u}$ je vektorová rovnice přímky p.

$\left.\begin{array}{rcl} x &=& a_1 + tu_1 \\ y &=& a_2 + tu_2 \\ z &=& a_3 + tu_3 \end{array}\right\}$ je parametrická rovnice přímky.

Vyloučením parametru t dostaneme dvě rovnice

$\left.\begin{array}{rcl} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &=& 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &=& 0 \end{array}\right\}$ všeobecné rovnice přímky.

Jde o rovnice dvou různých rovin, jejichž průsečíkem je přímka p.

Příklad 43 *Dokažte, že se bude opravdu jednat vždy o různé roviny.*

Řešení: Vektor $\mathbf{u}$ je směrovým vektorem přímky p právě tehdy, když jeho souřadnice (x, y, z) vyhovují soustavě $\left\{\begin{array}{rcl} a_1x + b_1y + c_1z &=& 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &=& 0 \end{array}\right.$, (jde o skalární součin směrového vektoru $\mathbf{u}$ přímky p a normálového vektoru $\mathbf{n}_i = (a_i, b_i, c_i), i = 1, 2,$ roviny)

2. Rovina

$X = A + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$ je vektorová rovnice roviny ϱ.

$\left.\begin{array}{rcl} x &=& a_1 + tu_1 + sv_1 \\ y &=& a_2 + tu_2 + sv_2 \\ z &=& a_3 + tu_3 + sv_3 \end{array}\right\}$ je parametrická rovnice roviny.

Vyloučením parametrů t, s dostaneme rovnici

$$ax + by + cz + d = 0,$$

t.j. obecnou rovnici roviny ϱ.

Každý vektor $\mathbf{w} \neq \mathcal{O}$ je směrovým vektorem roviny ϱ pokud jeho souřadnice (w_1, w_2, w_3)

vyhovují rovnici $aw_1 + bw_2 + cw_3 = 0$.
Všechny nenulové násobky vektoru $\mathbf{n} = (a, b, c)$ jsou normálové vektory.
Obecnou rovnici roviny dostaneme řešením determinantu

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Polorovina, polopřímka, úsečka

Nechť $A, B \in E^3$, $A \neq B$. Vektorová rovnice $X = A + t\mathbf{u}$, kde $\mathbf{u} = B - A$ a $t \in < 0, +\infty)$ je rovnicí polopřímky AB.
Pro $t \in < 0, -\infty)$ jde o rovnici polopřímky BA.
Pro $t \in < 0, 1 >$ jde o rovnici úsečky AB.
Zcela analogicky i pro parametrické rovnice.

Jestliže ve vektorové rovnici roviny položíme $t \in \mathbb{R}$, $s \in < 0, +\infty)$ dostaneme vektorovou rovnici poloroviny s hraniční přímkou $p : X = A + t\mathbf{u}$ a vnitřním bodem $C = A + \mathbf{v}$.

4. Vzájemná poloha dvou přímek

Dvě přímky v E^3 jsou buď
různoběžné = mají společný právě jeden bod,
rovnoběžné = leží v jedné rovině a nejsou různoběžné,
mimoběžné = neleží v jedné rovině.

Nechť přímky p, q jsou zadány rovnicemi

$$p : X = P + s\mathbf{u}, \quad q : Y = Q + t\mathbf{v} \tag{5.1.1}$$

nebo

$$p \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0 \end{cases} \qquad q \begin{cases} \alpha_1x + \beta_1y + \gamma_1z + \delta_1 &= 0 \\ \alpha_2x + \beta_2y + \gamma_2z + \delta_2 &= 0 \end{cases} \tag{5.1.2}$$

Vzájemná poloha přímek p, q potom záleží na řešitelnosti soustavy rovnic

$$P - Q = t\mathbf{v} - s\mathbf{u} \tag{5.1.3}$$

a nebo

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0 \\ \alpha_1x + \beta_1y + \gamma_1z + \delta_1 &= 0 \\ \alpha_2x + \beta_2y + \gamma_2z + \delta_2 &= 0 \end{cases} \tag{5.1.4}$$

Označme A matici koeficientů soustavy (5.1.3) a A^* matici rozšířenou této soustavy.
Označme B matici koeficientů soustavy (5.1.4) a B^* matici rozšířenou této soustavy.
Potom p, q jsou:

1. mimoběžné $\begin{array}{l} \Longleftrightarrow h(A^*) = 3 \\ \Longleftrightarrow h(B^*) = 4 \end{array}$

2. různoběžné $\begin{array}{l} \Longleftrightarrow h(A) = h(A^*) = 2 \\ \Longleftrightarrow h(B) = h(B^*) = 3 \end{array}$

3. rovnoběžné a různé $\begin{array}{l} \Longleftrightarrow h(A) = 1 \wedge h(A^*) = 2 \\ \Longleftrightarrow h(B) = 2 \wedge h(B^*) = 3 \end{array}$

4. totožné $\begin{array}{l} \Longleftrightarrow h(A) = h(A^*) = 1 \\ \Longleftrightarrow h(B) = h(B^*) = 2 \end{array}$

Úhel φ přímek p, q definujeme jako menší z úhlů,které svírají přímky p, q, pokud jsou různoběžné a jako nulový, pokud jsou rovnoběžné. Jestliže $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou směrové vektory p, q, potom

$$\cos\varphi = \frac{|\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}|}{|\mathbf{u}|.|\mathbf{v}|}$$

5. Vzájemná poloha přímky a roviny.

Přímka a rovina jsou

- různoběžné = mají právě jeden společný bod.
- rovnoběžné
  - různé = nemají žádný společný bod.
  - splývající = přímka leží v rovině.

Nechť přímka p je dána rovnicí (5.1.1) a nechť $\mathbf{n}$ je normálový vektor roviny ϱ. Potom

1. p a ϱ jsou různoběžné $\Longleftrightarrow \mathbf{u} \bullet \mathbf{n} \neq 0$.

2. p a ϱ jsou rovnoběžné, různé, t.j. $p \not\subset \varrho \Longleftrightarrow \mathbf{u} \bullet \mathbf{n} = 0 \wedge A \notin \varrho$.

3. p a ϱ jsou rovnoběžné, splývající, t.j. $p \subset \varrho \Longleftrightarrow \mathbf{u} \bullet \mathbf{n} = 0 \wedge A \in \varrho$.

Přímka p je kolmá na rovinu ϱ, jestliže je směrový vektor přímky nenulovým násobkem normálového vektoru roviny. Úhel přímky p a roviny ϱ je definovám jako úhel směrového vektoru přímky u a jeho ortogonálního průmětu u' do roviny ϱ. Pokud je $p \perp \varrho$ je $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Úhel počítáme podle vzorce

$$\cos\varphi = \frac{|\mathbf{u} \bullet \mathbf{u}'|}{|\mathbf{u}|.|\mathbf{u}'|}$$

6. Vzájemná poloha dvou rovin

Dvě roviny jsou

- různoběžné = mají společnou přímku.
- rovnoběžné, různé = nemají společný bod.
- rovnoběžné, splývající.

Nechť

$$\begin{array}{ll} \varrho: & a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ \sigma: & a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{array} \qquad (5.1.5)$$

Nechť A a A^* jsou matice koeficientů a matice rozšířená soustavy (5.1.5). Potom ϱ a σ jsou

1. různoběžné $\iff h(A) = h(A^*) = 2$
2. rovnoběžné, různé $\iff h(A) = 1 \wedge h(A^*) = 2$
3. totožné $\iff h(A) = h(A^*) = 1$

Úhel dvou rovin můžeme určit jako úhel jejich normálových vektorů.

$$\cos\varphi = \frac{|\mathbf{n}_1 \bullet \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1|.|\mathbf{n}_2|}$$

5.2 Analytická geometrie lineárních útvarů.

1. Vzdálenost bodu od přímky

Mějme přímku $p \equiv (A, B)$ a bod C, potom

$$d = \frac{|\overline{AB} \times \overline{AC}|}{|\overline{AB}|}.$$

2. Příčka mimoběžek

Nechť přímka p je určena bodem A a směrovám vektorem a, přímka q je je určena bodem B a směrovám vektorem b. Označme $\overline{AB} = c$, potom

$$d = \frac{|[a, b, c]|}{|a \times b|}.$$

Rovnice roviny procházející body A, B, C

Nechť $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$, $C = (x_3, y_3, z_3)$, potom rovnice roviny procházející těmito body je formální determinant

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

5.3 Kanonické tvary kuželoseček.

Definice 62 *Množinu bodů z* E^2 *o souřadnicích* (x, y) *nazveme kuželosečkou, jestliže vyhovují rovnici*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,$$

kde $a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_1, a_2, a_0 \in \mathbb{R}$. *Kvadratickou částí rovnice kuželosečky je* $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 +$ $+2a_{12}xy$, *lineární částí rovnice je* $2a_1x + 2a_2y$. *Matice*

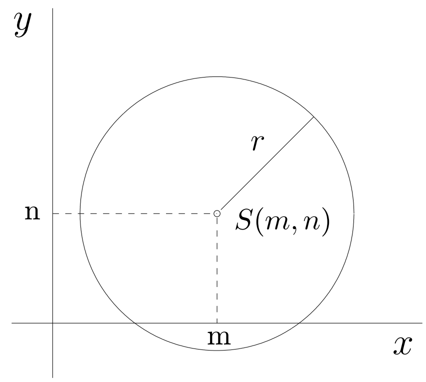
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$$

je maticí kuželosečky.

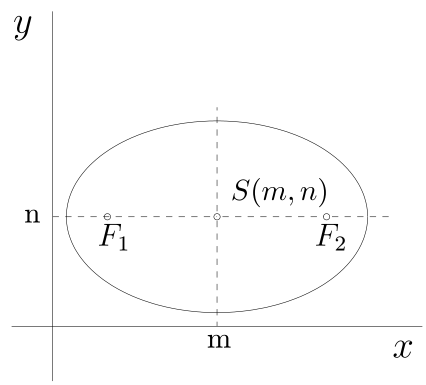
imaginární elipsa	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$
elipsa	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
hyperbola	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
parabola	$y^2 - 2px = 0$
bod	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$
dvě různoběžné přímky	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$
$\emptyset$	$x^2 + a^2 = 0$
dvě rovnoběžné přímky	$x^2 - a^2 = 0$
dvě splývající přímky	$x^2 = 0$

Tabulka 5.3.1: Kanonické tvary koželoseček

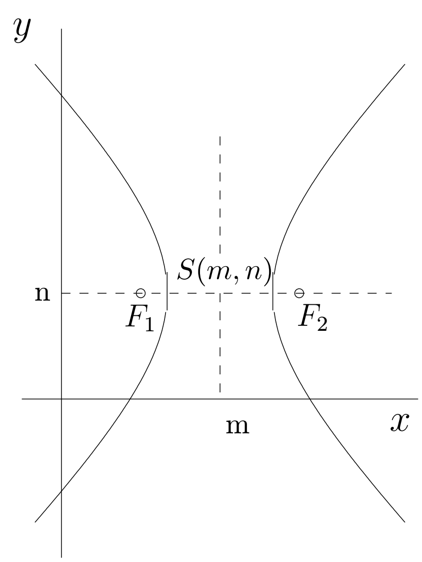
Poznámka 13 *Kružnice je speciální typ elipsy pro* $a = b$.



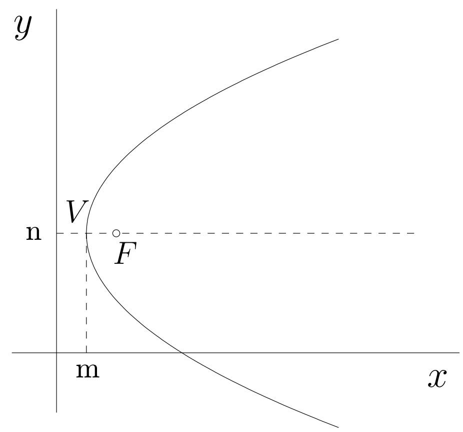
Obrázek 5.3.1: Kružnice: $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$



Obrázek 5.3.2: Elipsa: $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$



Obrázek 5.3.3: Hyperbola: $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$



Obrázek 5.3.4: Parabola: $(y-n)^2 = 2p(x-m)$

5.4 Kanonické tvary kvadrik.

Definice 63 *Množinu bodů z E^3 o souřadnicích (x, y, z) nazveme kvadrikou, nebo kvadratickou plochou, jestliže vyhovují rovnici*

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0,$$

kde $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_1, a_2, a_3, a_0 \in \mathbb{R}$. Kvadratickou částí rovnice kvadriky je $a_{11}x^2+ a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$, lineární částí rovnice je $2a_1x + 2a_2y + 2a_3z$. Matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix}$$

je maticí kvadriky.

Poznámka 14 *Koule je speciální typ elipsoidu pro $a = b = c$.*

5.5 Kuželosečky a kvadriky — základní vlastnosti

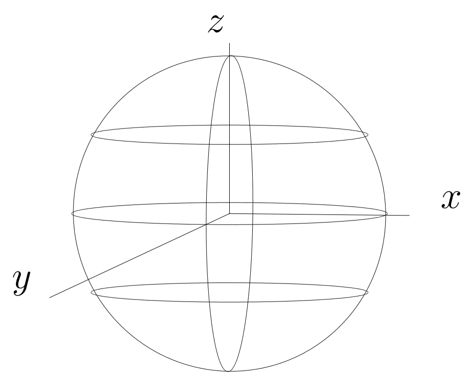
Definice 64 *Kvadratická plocha s maticí A se nazývá regulární, jestliže $|A| \neq 0$.*
Kvadratická plocha se nazývá singulární, jestliže $|A| = 0$.

Věta 5.5.1 *Regulární kuželosečky jsou: elipsa, hyperbola, parabola.*
Regulární kvadratické plochy jsou: elipsoid, hyperboloid, paraboloid.

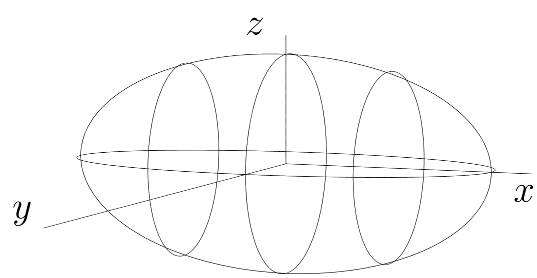
Definice 65 *Kvadratická plocha se nazývá středová, jestliže má jedinný střed souměrnosti (nazývá se střed kvadratické plochy).*

imaginární elipsoid	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$
elipsoid	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$
jednodílný hyperboloid	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$
dvoudílný hyperboloid	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$
eliptický paraboloid	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z=0$
hyperbolický paraboloid	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-2z=0$
imaginární kuželová plocha	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$
eliptická kuželová plocha	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
imaginární válcová plocha	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$
eliptická válcová plocha	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$
hyperbolická válcová plocha	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$
parabolická válcová plocha	$\frac{x^2}{a^2}-2py=0$
dvě imaginární různoběžné roviny	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$
dvě různoběžné roviny	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$
dvě imaginární rovnoběžné roviny	$x^2+a^2=0$
dvě rovnoběžné roviny	$x^2-a^2=0$
dvě splývající roviny	$x^2=0$

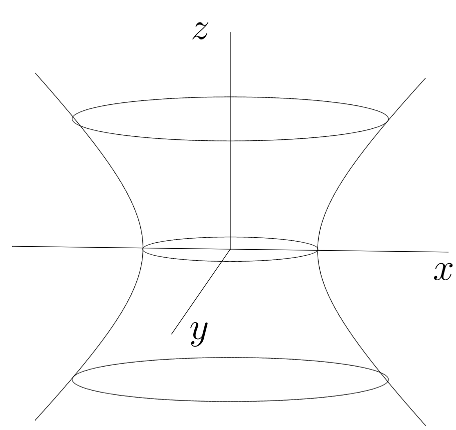
Tabulka 5.4.1: Kanonické tvary kvadrik



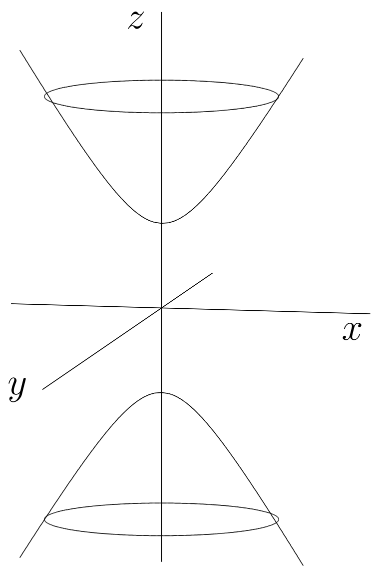
Obrázek 5.4.1: Koule: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$



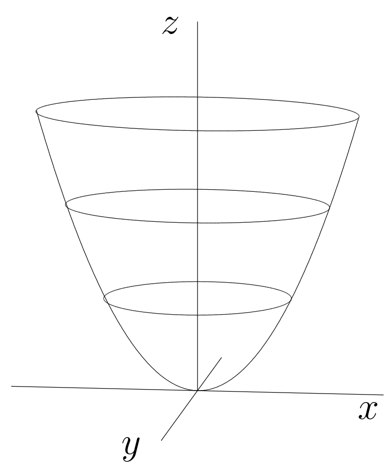
Obrázek 5.4.2: Elipsoid: $\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1$



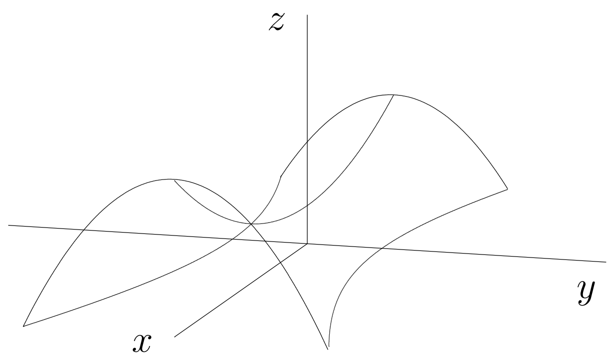
Obrázek 5.4.3: Jednodílný hyperboloid: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$



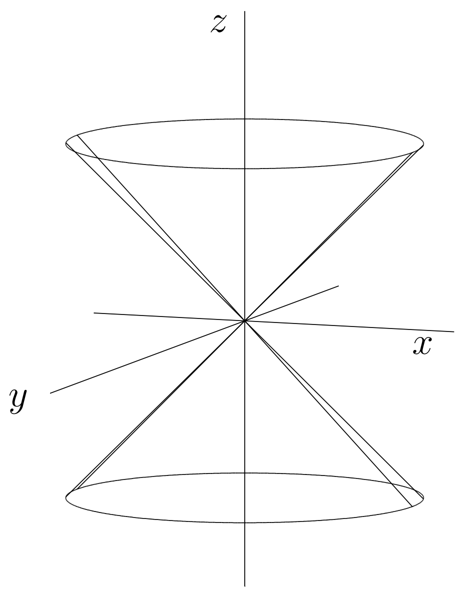
Obrázek 5.4.4: Dvojdílný hyperboloid: $x^2 + y^2 - z^2 = -1$



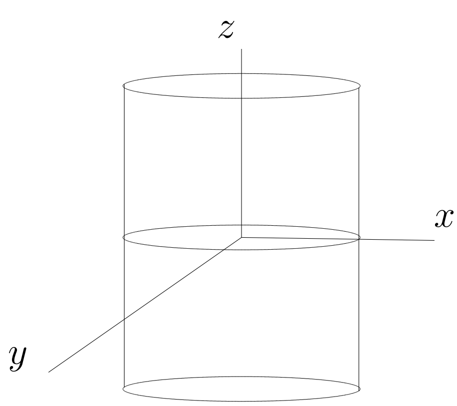
Obrázek 5.4.5: Eliptický paraboloid: $x^2 + y^2 - 2z = 0$



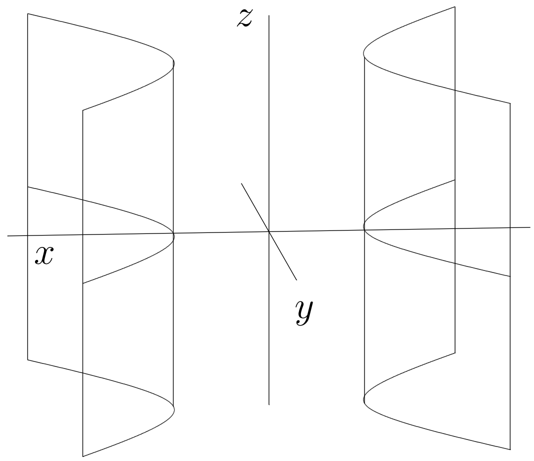
Obrázek 5.4.6: Hyperbolický paraboloid: $x^2 - y^2 - 2z = 0$



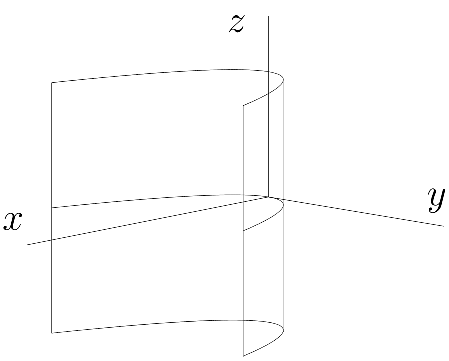
Obrázek 5.4.7: Kuželová plocha: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$



Obrázek 5.4.8: Eliptická válcová plocha: $x^2 + y^2 = 1$



Obrázek 5.4.9: Hyperbolická válcová plocha: $x^2 - y^2 = 1$



Obrázek 5.4.10: Parabolická válcová plocha: $y^2 = 2px$

Věta 5.5.2 *Bod $S = (s_1, s_2, s_3)$ je středem kvadratické plochy s maticí A právě tehdy, když uspořádaná trojice (s_1, s_2, s_3) je jediným řešením soustavy*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x & + & a_{12}y & + & a_{13}z & + & a_1 & = & 0 \\ a_{12}x & + & a_{22}y & + & a_{23}z & + & a_2 & = & 0 \\ a_{13}x & + & a_{23}y & + & a_{33}z & + & a_3 & = & 0 \end{array}$$

Věta 5.5.3 *Každá kuželosečka či kvadrika se dá vhodnou transformací převést na kanonický tvar.*

Příklad 44 *Určete kanonickou rovnici kuželosečky*

$$x^2 + y^2 + 4xy + 2x + 1 = 0.$$

Řešení: Použijeme Lagrangeovu metodu doplnění na čtverec. Vezmeme si všechny členy obsahující x a doplníme je na úplný čtverec. Potom provedeme totéž pro členy obsahující y.

$$x^2 + y^2 + 4xy + 2x + 1 = 0,$$

$$(x^2 + 4xy + 2x) + y^2 + 1 = 0,$$

$$[(x + 2y + 1)^2 - 4y^2 - 4y - 1] + y^2 + 1 = 0,$$

$$(x + 2y + 1)^2 - 3y^2 - 4y = 0,$$

$$(x + 2y + 1)^2 - 3\left(y^2 + \frac{4}{3}y\right) = 0,$$

$$(x + 2y + 1)^2 - 3\left(y + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} = 0,$$

$$-\frac{(x + 2y + 1)^2}{\frac{4}{3}} + \frac{3\left(y + \frac{2}{3}\right)^2}{\frac{4}{3}} = 1.$$

Označme

$$\xi = (x + 2y + 1) \quad \eta = \left(y + \frac{2}{3}\right).$$

Potom

$$-\frac{\xi^2}{\frac{4}{3}} + \frac{3\eta^2}{\frac{4}{3}} = 1.$$

Dostali jsme rovnici hyperboly.

Kapitola 6

Diferenciální počet funkcí jedné proměnné

6.1 ε - okolí

Definice 66 *ε - okolím bodu $a \in \mathbb{R}$ nazýváme otevřený interval $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$.*

Označení: $O(a), O(a,\varepsilon), U(a), U(a,\varepsilon)$.
Pravé okolí: $[a, a+\varepsilon)$.
Levé okolí: $(a-\varepsilon, a]$.

6.2 Limita funkce

Definice 67 *Číslo b se nazývá (vlastní) limita funkce f v bodě a, jestliže funkce je definována v okolí tohoto bodu a jestliže pro $\forall \varepsilon \exists \delta > 0$ (v závislosti na ε) taková, že $\forall x : |x-a| < \delta,\ x \neq a$ máme $|f(x) - b| < \varepsilon$.*

Tento fakt symobolicky zapisujeme následujícím způsobem:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \text{ nebo } f(x) \to b \ (x \to a).$$

Příklad 45 *Nechť $f(x) = x^3$. Ukážeme, že $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 8$. Víme, že $|x^3 - 8| = |x^2 + 2x + 4| \cdot |x-2|$. Podívejme se, co se děje, když se x blíží 2 v jistém okolí tohoto bodu, např. v okolí s poloměrem 1, tj.*

$$2 - 1 < x < 2 + 1 \implies 1 < x < 3.$$

Pro libovolnou hodnotu x v tomto okolí platí

$$7 < |x^2 + 2x + 4| < 19,$$

a tedy

$$|x^3 - 8| < 19|x-2|.$$

Nechť ε je libovolné pevně zvolené (malé) kladné číslo. Z předchozí nerovnosti plyne, že

$$|x^3 - 8| < \varepsilon \text{ if } |x-2| < \frac{\varepsilon}{19} = \delta.$$

($\varepsilon/19$ musí být menší než poloměr okolí, tj. 1.)

Geometricky splnění nerovnosti $|f(x) - b| < \varepsilon$ při splnění nervnosti $|x - a| < \delta$ znamená, že jestliže sestrojíme na ose y okolí bodu b s libovolně malým poloměrem ε, pak lze určit poloměr δ pro takové okolí bodu a na ose x, že hodnoty argumentu x (s výjimkou $x = a$) budou patřit do 2δ-okolí bodu a a hodnoty funkce padnou do 2ε okolí bodu b.

Příklad 46 *Definujme funkci* $y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & x \neq 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$ *Ukážeme, že* $\lim_{x\to 1} y(x) = \frac{1}{2}$. *Musíme tedy dokázat, že*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall x : |x-1| < \delta,\ x \neq 1 \Longrightarrow \left|\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$

Z poslední nerovnosti plyne, že $\left|\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}|x-1|$ *a* $\left|\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ jestliže $|x-1| < 2\varepsilon = \delta$.

Příklad 47 *Dokažte, že neexistuje limita* $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$.

Důkaz. Nechť limita je rovna číslu b, tj.

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = b.$$

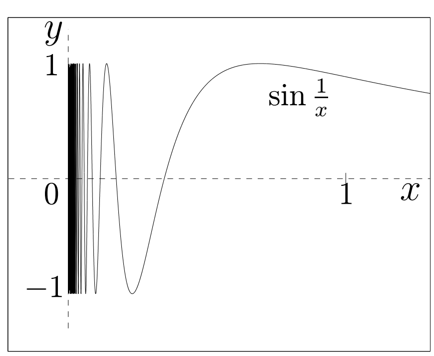
Vybereme posloupnost $\{x_n\} = \frac{1}{n\pi}$. *Zřejmě* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ *a*

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sin n\pi = 0.$$

Tedy $b = 0$. Vybereme jinou posloupnost $\{x_n\} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$. *Zřejmě* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ *a*

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1.$$

Tedy $b = 1$. Došli jsme ke sporu, protože jestliže limita existuje, pak hodnota b musí být určena jednoznačně.



Obrázek 6.2.1: Graf funkce $\sin\frac{1}{x}$

Příklad 48 *Existuje* $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ *?*

Příklad 49 *Uvažujme funkci*

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}\ .$$

Najdeme $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$*. Pro libovolné* $x \neq 2$ *máme* $f(x) = x+2$*, a protože definice limity pro* $x \to 2$ *nezahrnuje hodnotu funkce* f *v bodě* $x = 2$*, dostáváme*

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4.$$

6.3 Pravostranná a levostranná limita funkce. Limita zprava a zleva

Definice 68 *Pravostranná limita:*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a, x\in(a,+\infty)\cap D_f} f(x).$$

Číslo b *je pravostrannou limitou, jestliže*

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\ \forall x \in (a, a+\delta) : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Levostranná limita:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a, x\in(-\infty,a)\cap D_f} f(x).$$

Číslo b *je levostrannou limitou, jestliže*

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\ \forall x \in (a-\delta, a) : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Příklad 50 *Najděte jednostranné limity pro* $x \to 1$*, jestliže*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

Řešení: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2.$

Věta 6.3.1

$$\lim_{x\to a} f(x) = b,\ \ (a \neq \infty)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = b.$$

6.4 Nevlastní limita funkce

Definice 69 *Funkce f má v bodě $x = a$ nevlastní limitu (tj. limita je rovna $+\infty$ nebo $-\infty$), jestliže*

$$\forall M > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (a-\delta, a+\delta), x \neq a\ : f(x) > M \ \ (\text{nebo}\ \ f(x) < -M).$$

Píšeme:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty,\ \ \lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

6.5 Další případy limit

Následující limity mohou být definovány analogicky k předchozím definicím vlastních a nevlastních limit (viz podkapitoly 6.2 a 6.4):

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = b, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = b.$$

6.6 Některé věty o limitách

Věta 6.6.1 *Jestliže $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = b$ a $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = c$, pak*

$$\lim_{x\to a}[f_1(x) \pm f_2(x)] = b \pm c,$$

$$\lim_{x\to a} f_1(x) f_2(x) = b \cdot c,$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{b}{c}$$

jestliže $c \neq 0$ a $f_2(x) \neq 0$ (v jistém okolí $(a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$).

Věta 6.6.2 *Jestliže $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = b_1$ a $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = b_2$ a jestliže existuje okolí $U(a)$ takové, že v něm*

$$f_1(x) < f_2(x) \qquad (\textit{nebo}\ \ f_1(x) \leq f_2(x))$$

pro $x \in U(a), x \neq a$, pak $b_1 \leq b_2$.

Příklad 51 *Jestliže* $f_1(x) = 1 + x^2$, $f_2(x) = 1 + |x|, x \in U(0, \frac{1}{2}) \implies f_1(x) < f_2(x)$ *a* $b_1 \leq b_2$, *tj.* $b_1 = \lim\limits_{x \to 0} f_1(x) = 1 = \lim\limits_{x \to 0} f_2(x) = b_2$.

Věta 6.6.3 *Jestliže* $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = b_1$, $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = b_2$ *a* $b_1 < b_2$ *pak* $\exists\, U(a, \delta) \setminus \{a\}$ *takové, že* $f_1(x) < f_2(x) \quad \forall x \in U(a, \delta) \setminus \{a\}$.

Příklad 52 *Jestliže* $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 1 + x^2, a = 0$, *pak* $b_1 = 0 < b_2 = 1$ *and* $x^2 < 1 + x^2 \;\; \forall x \in U(0, 1) \setminus \{0\}$.

Věta 6.6.4 *Jestliže* $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = \lim\limits_{x \to a} f_2(x) = b$ *a jestliže*

$$f_1(x) \leq \varphi(x) \leq f_2(x)$$

pro $x \in U(a)$, $x \neq a$, *pak*

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = b.$$

6.7 Limita složené funkce

Pojem složené funkce (nebo také *funkce jiné funkce*):

$$y = f(z),\; z = \varphi(x) \implies y = f[\varphi(x)];$$

f nazýváme vnější funkcí, φ pak vnější funkcí.

Příklad 53 $f(x) = 1 + \cos x$, $\varphi(x) = (x - 1)^2$, $f[\varphi(x)] = 1 + \cos(x - 1)^2$, $\varphi[f(x)] = \cos^2 x$.

Věta 6.7.1 *Jestliže* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to b} \varphi(x) = c$ *a* $\exists\, U(a, \epsilon)$ *takové, že*

$$f(x) \neq b \;\; \text{pro} \;\; x \in U(a, \varepsilon), x \neq a, \tag{6.7.1}$$

pak

$$\lim_{x \to a} \varphi[f(x)] = c.$$

Příklad 54 *Jestliže* $f(x) = x^2$, $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, $a = 2$ *pak* $b = 4$, $c = \frac{1}{4}$ *a*

$$\lim_{x \to 2} \varphi[f(x)] = \frac{1}{4} \qquad \left(= \lim_{x \to 2} \frac{1}{x^2} \right).$$

Podmínka (6.7.1) je nutná!

Příklad 55

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \qquad \varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 2, \\ 0, & x = 2. \end{cases}$$

Nechť $a = 0$. *Pak* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 2} \varphi(x) = 1$, *ale* $\lim\limits_{x\to 0} \varphi[f(x)] = 0 \neq 1$ *a*

$$\varphi[f(x)] = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

6.8 Některé známé limity

(i)

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \doteq 2,71828,$$

(ii)

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

(iii)

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{c}{x}\right)^x = e^c, \quad c \in \mathbb{R},$$

(iv)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

(v)

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a \in \mathbb{R}^+,$$

(vi)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

(Tuto limitu lze získat z předchozí limity substitucí $a^x - 1 = z$)

(vii)

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

6.9 Spojitost funkce

Definice 70 *Funkce* f *se nazývá spojitá v bodě* a, *jestliže je definována v okolí* $U(a, \varepsilon)$ *a*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

$$(\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall x : |x - a| < \delta, |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

Definice 71 *Funkce f se nazývá zprava (zleva) spojitá v bodě a, jestliže*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a), \quad \left(\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)\right).$$

Poznámka 15 *Zkráceně zapisujeme:*

$$f(a^+) = \lim_{x\to a^+} f(x), \quad f(a^-) = \lim_{x\to a^-} f(x).$$

Zkrácený zápis $x \to a^+$ je ekvivalentní zápisu $x \to a$, $x > a$ a zkrácený zápis $x \to a^-$ je ekvivalentní zápisu $x \to a$, $x < a$.

Zaveďme pojem přírůstek funkce.

Definice 72 *Rozdíl*

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

se nazývá **přírůstek funkce f v bodě x** *příslušný přírůstku Δx nezávisle proměnné x.*

Zkráceně zapisujeme: $\Delta f = \Delta f(x); \Delta y = \Delta y(x), (y = f(x)), \Delta y(x) = \Delta f(x)$.

Poznámka 16 *Přírůstek Δx nezávisle proměnné x nezávisí na x. Nechť například $x = x_0 = 1, x = x_1 = 10, x = a = -9, \Delta x = 0,1$. Pak $x_0 + \Delta x = 1,1; x_1 + \Delta x = 10,1; a + \Delta x = -8,9$.*

Poznámka 17 *Definice funkce spojité v bodě a můžeme zapsat následujícím způsobem:*

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f(a) = f(a).$$

Definice 73 *Funkce f se nazývá spojitá na otevřeném intervalu (a, b), jestliže je spojitá v každém jeho bodě $c \in (a, b)$.*

Definice 74 *Funkce f se nazývá spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$, jestliže je spojitá na otevřeném intervalu (a, b) a navíc je v bodě a spojitá zprava a v bodě b zleva.*

Úkol. Napište analogicky definici spojitosti funkce na intervalech $(a, b]$ a $[a, b)$.

Úkol. Je funkce

$$y(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

spojitá (nespojitá) zprava (zleva) v bodě $x = 0$?

6.10 Některé vlastnosti spojitých funkcí

Věta 6.10.1 *Jsou-li funkce $f(x)$ a $\varphi(x)$ spojité v bodě a, pak jejich součet (nebo rozdíl) $f(x) \pm \varphi(x)$, součin $f(x) \cdot \varphi(x)$ a podíl $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ (v případě, že $\varphi(a) \neq 0$) jsou také spojité v bodě a.*

Věta 6.10.2 *Je-li funkce $\varphi(x)$ spojitá v bodě a a funkce $f(y)$ v bodě $b = \varphi(a)$, pak složené funkce $F(x) \equiv f[\varphi(x)]$ je spojitá v bodě a.*

Věta 6.10.3 *Je-li funkce $f(x)$ spojitá v bodě a, pak existuje okolí $U(a)$, v němž je $f(x)$ omezená.*

Příklad 56 *Konstatní funkce $f(x) = C$ je definována a je spojitá pro libovolnou hodnotu x, protože její přírůstek odpovídající libovolnému přírůstku Δx argumentu je $\Delta C = C - C = 0$, a tedy podmínka $\Delta C \to 0$ (pro $\Delta x \to 0$) je automaticky splněna.*

Příklad 57 *Funkce $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ je definována pro všechny body reálné osy a je v nich spojitá. Skutečně, funkce $y = x$ je spojitá pro libovolné x, neboť*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} [(x + \Delta x) - x] = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0.$$

Tedy funkce $x^2 = x \cdot x, x^3 = x^2 \cdot x, \dots, x^n = x^{n-1} \cdot x$ jsou také spojité.

Příklad 58 *Polynom*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

(kde $a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, n$) je spojitá funkce pro libovolné $x \in \mathbb{R}$. Racionální lomená funkce

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

(kde $a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, n$, $b_j \in \mathbb{R}, j = 0, \dots, m$) je spojitá pro všechny hodnoty $x \in \mathbb{R}$, pro něž $Q(x) \neq 0$.

6.11 Odstranitelná nespojitost

Definice 75 *Je-li f nespojitá v bodě $x = a$ a pokud současně existuje konečná limita $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, říkáme, že tento bod je bodem odstranitelné nespojitosti funkce.*

Tento pojem má význam, neboť v tomto případě může být funkce f redefinována v bodě a (za předpokladu, že je definována v a) a nebo dodefinována v bodě a (jestliže původně nebyla v bodě a definována) tak, že položíme

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x),$$

takže (téměř definovaná!) funkce f je v tomto bodě spojitá.

Příklad 59 *Funkce*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1, \\ 3, & x = 1 \end{cases}$$

není spojitá v bodě $x = 1$. Tato nespojitost je odstranitelná, neboť položíme-li $f(1) = 2$, (nová) funkce f bude spojitá v $x = 1$.

Příklad 60 *Funkce $y = \sin \frac{1}{x}$ je omezená a má neodstranitelný bod nespojitosti $x = 0$.*

Příklad 61 *Funkce $y = (\operatorname{sign} x)^2$ kde*

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

má bod odstranitelné nespojitosti $x = 0$.

6.12 Klasifikace nespojitostí

Definice 76 *Existují-li pro funkci f v (konečném) bodě a (konečná) čísla $f(a^-)$, $f(a^+)$ a má-li funkce v a přesto bod nespojitosti, říkáme, že tato funkce má bod nespojitosti prvního druhu v bodě a.*

Příklad 62 *Funkce*

$$f_1(x) = \begin{cases} 3, & x = 1, \\ 2, & x > 1, \\ 1, & x < 1, \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 2, & x > 1, \\ \\ 1, & x \leq 1, \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 2, & x \geq 1, \\ 1, & x < 1, \end{cases} \qquad f_4(x) = \begin{cases} 3, & x = 1, \\ 1, & x^2 < 1, \end{cases}$$

$$f_5(x) = \begin{cases} 2, & x > 1, \\ 1, & x < 1, \end{cases} \qquad f_6(x) = \begin{cases} 1, & x > 1, \\ 1, & x < 1 \end{cases}$$

mají v bodě $x = 1$ bod nespojitosti prvního druhu.

Definice 77 *Číslo $\delta = \delta(a) = f(a^+) - f(a^-)$ se nazývá skok nespojitosti. (Bod $x = a$ se pak nazývá bodem skokové nespojitosti.)*

Poznámka 18 *Je-li $x = a$ bodem odstranitelné nespojitosti, pak $\delta(a) = 0$.*

Definice 78 *Je-li funkce f definována v okolí bodu a (popřípadě s výjimkou bodu a samotného) a má-li v bodě a bod nespojitosti, který nepatří do třídy nespojitostí prvního druhu, říkáme, že funkce má v a bod nespojitosti druhého druhu.*

Příklad 63 *Funkce $y = \sin \frac{1}{x}$ má v bodě $x = 0$ nespojitost druhého druhu. Funkce $y = \frac{1}{x}$ má v bodě $x = 0$ nespojitost druhého druhu.*

6.13 Funkce spojité na uzavřeném intervalu

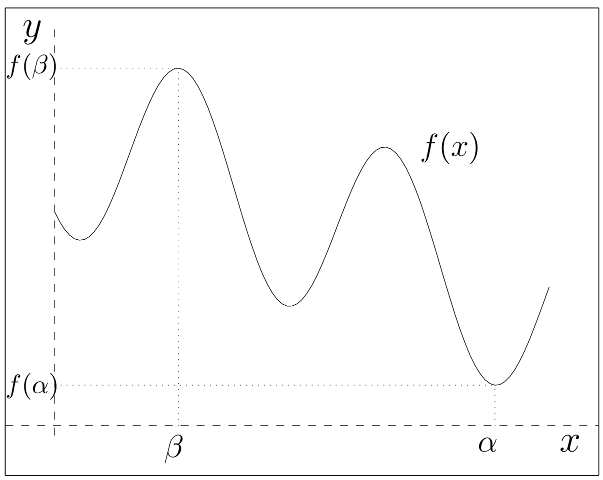
Věta 6.13.1 *Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$, je na něm omezená.*

Zkráceně zapisujeme skutečnost, že funkce f je spojitá na $[a, b]$ takto: $f \in C[a, b]$ nebo $f \in C$ na $[a, b]$.

Věta 6.13.2 (*Weierstrass*) *Funkce $f \in C$ na $[a, b]$ nabývá v nějakých bodech intervalu $[a, b]$ svého maxima a minima, tj. existují body α a β patřící do $[a, b]$ takové, že*

$$\min_{x\in[a,b]} = f(\alpha), \quad \max_{x\in[a,b]} = f(\beta).$$

Tedy $f(\alpha) \le f(x) \le f(\beta)$ pro všechna $x \in [a, b]$.



Obrázek 6.13.1: Weierstrassova věta

Poznámka 19 *Např. funkce $y = x$ je spojitá na otevřeném intervalu $(0, 1)$ a je na něm omezená; avšak na tomto intervalu nedosahuje svého supréma $\sup\limits_{x\in(0,1)} x = 1$, tj. neexistuje $x_0 \in (0, 1)$ takové, že by funkční hodnota v tomto bodě byla rovna 1. Vidíme, že funkce je rovna 1 pro $x = 1$. Vidíme, že požadavek spojitosit funkce na uzavřeném intervalu $[a, b]$ (zahrnujícím oba krajní body a a b) je zásadní.*

Zřejmě $\sup\limits_{x\ge 0} \mathrm{arctg} x = \frac{\pi}{2}$. Neexistuje však bod x na polopřímce $x \ge 0$, v němž by funkce $\mathrm{arctg} x$ *nabývala hodnoty $\frac{\pi}{2}$; tedy pro $x \ge 0$ nedosahuje svého maxima. Podmínky výše uvedené věty jsou i v tomto případě porušeny, protože definiční obor spojité funkce* $\mathrm{arctg} x$ *není omezený.*

Věta 6.13.3 *Je-li $f \in C$ na $[a, b]$ a $f(a) \cdot f(b) < 0$, pak existuje na otevřeném intervalu (a, b) alespoň jeden bod c, pro nějž $f(c) = 0$.*

Důsledek 29 *Funkce $f \in C$ na $[a, b]$ nabývá na tomto intervalu všech hodnot mezi hodnotami v koncových bodech.*
Každá polynomiální rovnice $P_n(x) = 0$ lichého stupně n, $a_n \neq 0$, má nejméně jedno řešení.

Příklad 64 *Rovnice $\cos x - x = 0$ má kořen ležící na intervalu $(0, \pi)$, protože $f(0) > 0, f(\pi) < 0$ kde $f(x) = \cos x - x$ a $f(x)$ je spojitá funkce.*

6.14 Tečna ke křivce

Nechť Γ je graf spojité funkce $y = f(x)$. Vybereme na funkci Γ bod A s souřadnicí x_0 a jiný bod C se souřadnicí $x_0 + \Delta x, (\Delta x \neq 0)$. Sečna S procházející bodem A a C svírá s kladnou poloosou x úhel β. Tangens úhlu β vyjádříme vzorcem

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \ .$$

Nechť Δx se blíží nule; pak pro spojitou funkci f se hodnota Δy také bude blížit nule a bod C se bude pohybovat podél Γ a bude se přibližovat k bodu A. Jestliže se v tomto limitním procesu ukáže, že poměr $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se blíží jedné a že pro nějakou konečnou limitu (číslo) k libovolné takové, pro něž Δx se blíží k nule platí0

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow k \quad (\Delta x \longrightarrow 0),$$

pak úhel β se bude také blížit k jistému úhlu α. Spolu se změnou β bude sečna S rotovat kolem A a bude se v limitě přibližovat k přímce T procházející bodem A a svírající úhel α s kladnou poloosou x. To znamená, že T je tečnou k funkci Γ v bodě A a

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \mathrm{tg}\beta = \mathrm{tg}\alpha = k.$$

Tak jsme dokázali, že jestliže se poměr $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ blíží konečné limitě pro $\Delta x \to 0$, křivka Γ má v bodě A tečnu, jejíž směrnice je rovna této limitě.

Rovnici tečny lze zapsat takto: $y - y_0 = k(x - x_0)$, kde

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \ .$$

6.15 Derivace

Definice 79 *Derivace $f'(x_0)$ funkce f v bodě x_0 je definována jako vlastní limita*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \ .$$

(Jiný zápis: $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$.)

Poslední limita může být přepsána takto:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ .$$

Příklad 65 *Pro $n \in \mathbb{N}$ máme $(x^n)' = nx^{n-1}$. Opravdu, podle Newtonovy binomické věty*

$$\begin{aligned}
(x^n)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} &= \\
= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left[x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} \Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \cdots + \right. & \\
\left. + \binom{n}{n-1} x (\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n - x^n \right] &= \\
= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left[nx^{n-1} \Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \cdots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n \right] &= \\
&= nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

Věta 6.15.1 *Jestliže má funkce f v bodě x_0 derivaci f', je v tomto bodě spojitá.*

6.16 Fyzikální význam derivace

1. Okamžitá rychlost

Nechť se bod pohybuje po přímce a nechť funkce $s = f(t)$ vyjadřuje závislost jeho vzdálenosti s od počátečního bodu O (bráno s odpovídajícím znaménkem) v čase t. V okamžiku t je bod ve vzdálenosti $s = f(t)$ od O. V jiném časovém okamžiku $t + \Delta t$ je ve vzdálenosti $s + \Delta s = f(t + \Delta t)$ od O. Jeho průměrná rychlost během časového intervalu $(t, t + \Delta t)$ je vyjádřena jako

$$v_{av} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \ .$$

Okamžitá („skutečná“) rychlost v bodu v okamžiku t může přirozeně být definována jako limita, k níž se v_{av} blíží, když $\Delta t \to 0$, tj.

$$v(t) = v_{ins}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t).$$

6.17 Derivace základních elementárních funkcí

$$(C)' = 0,\ C \in \mathbb{R}, \tag{6.17.1}$$
$$(x^a)' = ax^{a-1},\ a \in \mathbb{R}, \tag{6.17.2}$$
$$(a^x)' = a^x \ln a,\ a > 0, \tag{6.17.3}$$
$$(e^x)' = e^x\ , \tag{6.17.4}$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}\ \ , x > 0, a > 0, \tag{6.17.5}$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}\ \ , x > 0, \tag{6.17.6}$$
$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}\ \ , x \neq 0, \tag{6.17.7}$$
$$(|x|)' = \mathrm{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases} \tag{6.17.8}$$
$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x, \tag{6.17.9}$$
$$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \tag{6.17.10}$$
$$(\mathrm{cotg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}, \tag{6.17.11}$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x| < 1, \tag{6.17.12}$$
$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x| < 1, \tag{6.17.13}$$
$$(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \tag{6.17.14}$$
$$(\mathrm{arccotg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}, \tag{6.17.15}$$
$$(\sinh x)' = \cosh x, \tag{6.17.16}$$
$$(\cosh x)' = \sinh x, \tag{6.17.17}$$
$$(\mathrm{tgh} x)' = \frac{1}{(\cosh x)^2}, \tag{6.17.18}$$
$$(\mathrm{cotgh} x)' = \frac{-1}{(\sinh x)^2}. \tag{6.17.19}$$

Derivace zprava a zleva:

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to 0, \Delta x > 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\ \ , \quad f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to 0, \Delta x < 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\ .$$

Základní pravidla pro derivování:

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x), \qquad (6.17.20)$$
$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \qquad (6.17.21)$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{1}{g^2(x)} \left(f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)\right), \qquad (6.17.22)$$
$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = g(x)[f(x)]^{g(x)-1} f'(x) + [f(x)]^{g(x)}(\ln f(x))g'(x). \qquad (6.17.23)$$

Derivace složené funkce:

$$y = f[\varphi(x)], \qquad y' = f'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)$$

6.18 Diferenciál funkce

Definice 80 *Funkce f se nazývá diferencovatelná v bodě x_0, jestliže její přírůstek $\Delta f(x_0)$ lze vyjádřit jako*

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \qquad (6.18.1)$$

kde $A = f'(x_0) =$const, $\Delta x = x - x_0$ a $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Příklad 66 *Funkce $y = x^2$ je diferencovatelná pro všechna $x \in \mathbb{R}$, protože*

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

a $A = 2x, \alpha(\Delta x) = \Delta x$.

Definice 81 *Hlavní – lineární – část přírůstku (6.18.1) se nazývá diferenciál funkce f v bodě x vzhledem k danému přírůstku Δx a značí se $df(x) = f'(x)\Delta x$ (nebo $dy = f'(x)dx$).*

Poznámka 20 *a) $dx = \Delta x$, b) $\Delta f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$, jestliže $\Delta x \to 0$ a $f'(x_0) \neq 0$.*
Geometrický význam diferenciálu: Rovnici tečny lze zapsat jako

$$y - y_0 = \mathrm{tg}\alpha \cdot (x - x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

jestliže $x = x_0 + \Delta x$. Tedy $y = y_0 + f'(x_0)\Delta x = y_0 + dy(x_0)$.

Příklad 67 *Máme odhadnout množství materiálu potřebného k výrobě krabice ve tvaru krychle, jestliže víme, že její vnitřní hrany jsou 10 cm dlouhé a že tloušťka stěn je $0,1$ cm.*

Objem krychle s hranou a je vyjádřen funkcí $V(a) = a^3$. Objem materiálu potřebného na stěny krychle je přibližně vyjádřen přírůstkem této funkce:

$$\Delta V = V(10 + 0,1) - V(10) \approx V'(10) \cdot 0,1 = 300 \cdot 0,1 = 30cm^3.$$

6.19 Derivace inverzní funkce

$$y = f(x),\ x = g(y),\ f[g(y)] \equiv y,\ \ f'[g(y)] \cdot g'(y) = 1 \quad \Longrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)}\ . \tag{6.19.1}$$

Příklad 68 *Je-li $y = x + \ln x$, čemu je rovna $x'(y)$?*

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x(y)}{1+x(y)}\ .$$

6.20 Derivace a diferenciály vyšších řádů

Derivaci 2. řádu získáme derivováním $f'(x)$:

$$f''(x) = [f'(x)]';$$

analogicky pro derivaci vyšších řádů:

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'.$$

Příklad 69

- $y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, y' = \alpha x^{\alpha-1},\ y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \dots, y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$. *Pro $\alpha \in \mathbb{N}$ je $y^{(\alpha)} = \alpha(\alpha-1)\dots 1x^0 = \alpha!$ a $y^{(\alpha+1)} = y^{(\alpha+2)} = \dots = 0$,*

- $y = 2^x, y' = 2^x \ln 2, y'' = 2^x(\ln 2)^2, \dots, y^{(n)} = 2^x(\ln 2)^n$.

Leibnizova formule: Je-li $f(x) = u(x)v(x)$, pak

$$f^{(n)} = uv^{(n)} + \binom{n}{1}u'v^{(n-1)} + \binom{n}{2}u''v^{(n-2)} + \dots + u^{(n)}v = \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}u^{(l)}v^{(n-l)}.$$

Diferenciály vyšších řádů:

$$dy = f'(x)dx,\ d^2y = d(dy), \dots, d^ny = d(d^{n-1}y).$$

Nechť $y = f(x)$. Vypočtěte d^2y : $d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)' = f''(x)(dx)^2 + f'(x)(dx)'dx = f''(x)(dx)^2$, protože $(dx)' = (\Delta x)' = 0$ (Δx je považováno za konstantní veličinu nezávislou na x). V obecném případě

$$d^nf(x) = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

6.21 Numerické derivování

Nejjednodušší vzorce pro numerické derivování

Předpokládejme, že v nějakém bodě x má funkce f derivaci

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Potom je přirozené položit

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Vyvstává otázka: jaká je chyba (tj. jaký je rozdíl mezi členy na pravé a na levé straně) této přibližné rovnosti? Abychom získali kvantitativní odhady této chyby, sám fakt, že existuje $f'(x)$, je nedostatečný. Proto obvykle při analýze chyb přibližných metod numerické derivace požadujeme, aby měla daná funkce derivaci řádu vyššího než počítaná derivace. Nechť $x_i = x_0 + i \cdot h$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, kde $h > 0$ je krok. Položme $f_i = f(x_i)$, $f'_i = f'(x_i)$, atd. Předpokládejme, že $f \in C^2([x_0, x_1], \mathbb{R})$. Potom existuje bod ξ takový, že

$$f'_0 = \frac{f_1 - f_0}{h} - \frac{h}{2} \cdot f''(\xi), \quad x_0 < \xi < x_1. \tag{6.21.1}$$

Je-li $f \in C^3([x_{-1}, x_1], \mathbb{R})$, pak navíc

$$f'_0 = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} - \frac{h^2}{6} \cdot f'''(\xi), \quad x_{-1} < \xi < x_1. \tag{6.21.2}$$

Z podmínky, že $f \in C^{(4)}[x_{-1}, x_1]$, dostáváme

$$f''_0 = \frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{h^2} - \frac{h^4}{12} \cdot f^{(4)}(\xi), \quad x_{-1} < \xi < x_1. \tag{6.21.3}$$

Bod ξ ve výše uvedených vzorcích není znám.
Vztahy (6.21.1) a (6.21.3) mohou být dokázány přesně. Tyto důkazy vynecháváme.
Vztahy (6.21.1) - (6.21.3) se nazývají *vzorce pro numerické derivování se zbytkem* a vztahy

$$f'_0 \approx \frac{f_1 - f_0}{h}, \quad f'_0 \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}, \quad f''_0 \approx \frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{h^2}$$

jednoduše *vzorce pro numerické derivování.* Chyby těchto vzorců jsou

$$\left| f'_0 - \frac{f_1 - f_0}{h} \right| \le \frac{h}{2} \max_{[x_0, x_1]} |f''(x)|,$$

(chyba je prvního řádu vzhledem k h (nebo je řádu h));

$$\left| f'_0 - \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} \right| \le \frac{h^2}{6} \max_{[x_{-1}, x_1]} |f'''(x)|,$$

(říkáme, že chyba zde a v následujícím vztahu je druhého řádu vzhledem k h (neboli je řádu h^2)),

$$\left| f''_0 - \frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{h^2} \right| \le \frac{h^2}{12} \max_{[x_{-1}, x_1]} |f^{(4)}(x)|.$$

6.22 Derivování s programem MAPLE V

Derivování pomocí programu MAPLE V se provádí pomocí příkazu

```
"diff".
```

Prvním argumentem tohoto příkazu je výraz, který má být zderivován, druhým argumentem je proměnná, vzhledem k níž budeme derivovat.

Příklad 70 *Najděte derivaci funkce*

$$f(x) = \sin x \cdot \tan x.$$

pomocí MAPLE V.

Řešení. napišme odovídající příkaz v MAPLE:

```
diff(sin(x)*tan(x),x);
```

Výsledek vypsaný programem MAPLE je tvaru:

$$\cos(x)\tan(x)\sin(x)(1 + tan(x)^2)$$

Příklad 71 *Najděte derivaci funkce*

$$x^{x^x}.$$

pomocí programu MAPLE V.

Řešení. Napišme odpovídající příkaz v MAPLE:

```
diff(x^(x^x),x);
```

Výsledek vypsaný programem MAPLE je tvaru:

$$x^{(x^x)}\left(x^x\left(\ln(x)+1\right)+\frac{x^x}{x}\right)$$

6.23 Taylorovy polynomy

Uvažme následující problém: Jaké podmínky zaručují, že funkce $f(x)$ může být přibližně zapsána jako polynom? Předpokládejme, že $f(x) \in C^n$ (kde n je dostatečně vysoké číslo) v okolí $\mathcal{O}\,(x_0)$. Pokusme se přibližně nahradit tuto funkci $f(x)$ polynomem

$$f(x) \doteq a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n.$$

Lehce nahlédneme, že (pro $x = x_0$) $a_0 = f(x_0)$. Derivujme tento polynom. Dostáváme

$$f'(x) \doteq a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \cdots + na_n(x-x_0)^{n-1}$$

a vidíme, že $a_1 = f'(x_0)$. Analogicky

$$f''(x) \doteq 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}$$

a, jako výše, $a_2 = \frac{1}{2} f''(x_0)$. Pokračujeme-li tímto způsobem, dostáváme po $n$té derivaci

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Dosazením těchto výrazů do původní nerovnosti dostáváme

$$f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Koeficienty

$$a_k = \frac{f^k(x_0)}{k!}, \, k = 0, 1, 2, \ldots$$

se nazývají *Taylorovy koeficienty* a součty

$$T_k(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \, k = 0, 1, 2, \ldots$$

Taylorovy polynomy.

6.24 Taylorův vzorec

Napišme

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

kde $T_n(x)$ je Taylorův polynom a $R_n(x)$ je zbytek.

Věta 6.24.1 (Lagrangeova věta) *Je-li* $f(x) \in C^{(n+1)}$ *na* $\mathcal{O}\ (x_0)$ *pak*

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$$

pro všechna $x \in \mathcal{O}(x_0)$, *kde* ξ *je číslo ležící mezi* x_0 *a* x.

6.25 Inverzní trigonometrické funkce a jejich derivace

- $y = \arcsin x$ (arkus sinus) je inverzní k funkci $y = \sin x$;
  $\arcsin(\sin x) \equiv x, \sin(\arcsin x) \equiv x, x \in D_f = [-1, 1]$.

Derivace funkce $y = \arcsin x$:

$$y = \arcsin x \Longrightarrow x = \sin y;$$

podle vzorce (6.19.1)

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad ,$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- $y = \arccos x$ (arkus kosinus) je inverzní k funkci $y = \cos x$;
  $\arccos(\cos x) \equiv x, \cos(\arccos x) \equiv x, x \in D_f = [-1, 1]$.

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- $y = \operatorname{arctg} x$ (arkus tangens) je inverzní k funkci $y = \operatorname{tg} x$;
  $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) \equiv x, \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) \equiv x, x \in D_f = (-\infty, +\infty)$,

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2} \quad ,$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

- $y = \operatorname{arccotg} x$ (arkus kotangens) je inverzní k funkci $y = \operatorname{cotg} x$;
  $\operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg} x) \equiv x, \operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg} x) \equiv x, x \in D_f = (-\infty, +\infty)$.

$$(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$$

6.26 Derivace hyperbolických funkcí

- $(\sinh x)' = \cosh x$
- $(\cosh x)' = \sinh x$
- $(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$
- $(\operatorname{cotgh} x)' = \frac{-1}{\sinh^2 x}$

6.27 Derivace inverzních hyperbolických funkcí

- $y = (\operatorname{argsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$,
- $y = (\operatorname{argcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $x > 1$,
- $y = (\operatorname{argtgh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$, $|x| < 1$,
- $y = (\operatorname{argcotgh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$, $|x| > 1$

Dokažme první vzorec: $y = \operatorname{argsinh} x \Longrightarrow x = \sinh y$,

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \; .$$

6.28 Klasifikace funkcí

1. **Základní elementární funkce**

   Definice 82 *Třída základních elementárních funkcí zahrnuje následující funkce:*

   (a) mocninná funkce $y = x^\alpha$, $x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{N}$*;*

   (b) exponenciální funkce $y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$*; logaritmická funkce* $y = \log_a x$, $a > 0$, $a > 1$*;*

   (c) trigonometrické funkce $(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x)$ *a inverzní trigonometrické funkce* $(\arcsin x,\ \arccos x,\ \operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arccotg} x)$.

2. **Elementární funkce**

   Definice 83 *Funkce, které vzniknou ze základních elementárních funkcí a konstant pomocí konečného počtu aritmetických operací a skládání funkcí se nazývají elementární funkce.*

   Např.

   $$y = \arcsin \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-e^x}}$$

   je elementární funkce.

3. **Algebraické funkce**

   Definice 84 *Algebraická funkce je funkce* $y = y(x)$ *daná algebraickou rovnicí*

   $$P_n(x)y^n + P_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + P_1(x)y + P_0(x) = 0,$$

   kde $P_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$ *jsou polynomy.*

Speciální případy:

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

(pro $P_1(x) \equiv -1, P_j(x) \equiv 0, j > 1$) nebo

$$y = \frac{-P_0(x)}{P_1(x)}$$

(pro $P_j(x) \equiv 0, j > 1$).

4. **Transcendentní funkce**

Definice 85 *Každá funkce, která nepatří do třídy algebraických funkcí, se nazývá transcendentní.*

6.29 Některé věty o diferencovatelných funkcích

Věta 6.29.1 (Fermatova věta) *Jestliže*
a) $f(x) \in C$ *na* $[a, b]$,
b) v bodě ξ *nabývá* $f(x)$ *své nejvyšší (nebo nejnižší) hodnoty*
c) $\exists f'(\xi)$
pak $f'(\xi) = 0$.

Věta 6.29.2 (Rolleova věta) *Jestliže*
a) $f(x) \in C$ *na* $[a, b]$,
b) $f(x) \in C^1$ *na* (a, b),
c) $f(a) = f(b)$
pak $\exists \xi \in (a, b)$ *takové, že* $f'(\xi) = 0$.

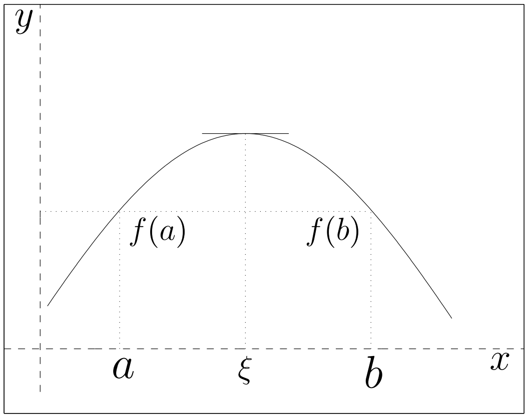
Věta 6.29.3 (Lagrangeova věta) *Jestliže*
a) $f(x) \in C$ *na* $[a, b]$,
b) $f(x) \in C^1$ *na* (a, b)
pak $\exists \xi \in (a, b)$ *takové, že*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad .$$

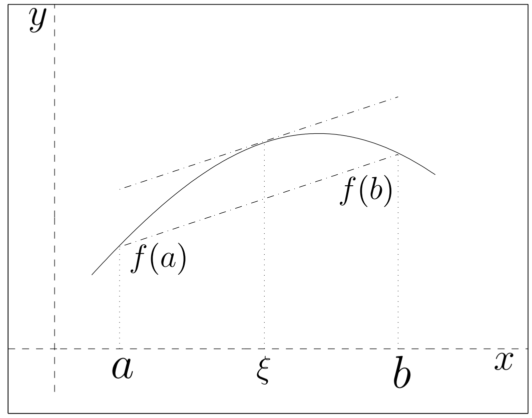
Geometrický význam.
Jiný tvar Lagrangeovy věty:

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \quad .$$

Přírůstek funkce $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ závisí na hodnotě derivace a přírůstku nezávisle proměnné.



Obrázek 6.29.1: Význam Rolleovy věty



Obrázek 6.29.2: Význam Lagrangeovy věty

Věta 6.29.4 (Cauchyova věta) *Jestliže*
a) $f(x), \varphi(x) \in C$ *na* $[a, b]$,
b) $f(x), \varphi(x) \in C^1$ *na* (a, b),
c) $\varphi'(x) \neq 0$ *na* (a, b),
pak existuje číslo $\xi \in (a, b)$ *takové, že*

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} \quad .$$

Věta 6.29.5 (L'Hospitalovo pravidlo) *Je-li*
$\lim\limits_{x \to x_0\,(\infty)} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0\,(\infty)} \varphi(x) = 0\,(\infty)$,
a existuje-li limita

$$\lim_{x \to x_0\,(\infty)} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

pak

$$\lim_{x \to x_0\,(\infty)} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0\,(\infty)} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

Příklad 72

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1;$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

6.30 Testování monotónnosti funkce

Věta 6.30.1 (Nutné podmínky monotónnosti funkce) *Jestliže* $\exists\, f'(x)$ *na* (a, b) *a*

1) $f(x)$ *roste na* (a, b) $\Longrightarrow$ $f'(x) \geq 0$ *na* (a, b),

2) $f(x)$ *klesá na* (a, b) $\Longrightarrow$ $f'(x) \leq 0$ *na* (a, b),

3) $f(x)$ *je rovno konstantě na* $(a, b) \implies f'(x) = 0$ *na* (a, b).

Věta 6.30.2 (Dostatečné podmínky pro monotónnost) *Jestliže* $f(x) \in C$ *na* $[a, b]$, $f'(x) \in C^1$ *na* (a, b) *a*

1) $f'(x) > 0$ *na* $(a, b) \implies f(x)$ *roste na* $[a, b]$,

2) $f'(x) < 0$ *na* $(a, b) \implies f(x)$ *klesá na* $[a, b]$,

3) $f'(x) = 0$ *na* $(a, b) \implies f(x) \equiv \mathrm{k}$ *na* $[a, b]$.

6.31 Extrémy funkcí

Definice 86 *Bod* x_0 *se nazývá lokální maximum (lokální minimum) funkce* $f(x)$ *jestliže* $f(x_0) \geq f(x),\ x \in \mathcal{O}(\S_\prime)\ (f(x_0) \leq f(x),\ x \in \mathcal{O}(\S_\prime))$.

Definice 87 *Body, v nichž funkce nabývá svého maxima nebo minima se souhrnně označují jako body extrému. Hodnota funkce v těchto bodech se nazývá extrém.*

Věta 6.31.1 (Nutná podmínka pro existenci extrému) *Jestliže funkce* $f(x)$ *má extrém v bodě* x_0, *jeho derivace v tomto bodě (pokud* $\exists f'(x_0)$*) je rovna nule nebo neexistuje.*

6.32 Nutné podmínky pro extrémy

Věta 6.32.1

A) *Je-li* $f'(x)$ *kladná pro* $x < x_0$ *a záporná pro* $x > x_0$, *bod* x_0 *je bodem lokálního maxima. Je-li* $f'(x)$ *záporná pro* $x < x_0$ *a kladná pro* $x > x_0$, *bod* x_0 *je bodem lokálního minima.*

B) *Je-li* $f'(x_0) = 0$ *a*

- $f''(x_0) > 0$, *bod* x_0 *je bodem lokálního minima,*
- $f''(x_0) < 0$, *bod* x_0 *je bodem lokálního maxima.*

C) *Je-li* $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots f^{(n-1)}(x_0) = 0$, n *je sudé a* $f^{(n)}(x_0) > 0\ (< 0)$, *bod* x_0 *je bodem lokálního minima (maxima).*

6.33 Konvexnost a konkávnost křivky. Inflexní body.

Definice 88 *Říkáme, že oblouk křivky je konvexní, jestliže leží celý na jedné straně tečny vedené kterýmkoli bodem oblouku.*

Rozlišujeme dva druhy konvexních oblouků: konvexní nahoru (konkávní dolů), konvexní dolů (konkávní nahoru, konvexní).

Definice 89 *Bod křivky, který odděluje její konvexní oblouk od konkávního se nazývá inflexní bod.*

Věta 6.33.1 *Je-li $f''(x) < 0$, pak oblouk $y = f(x)$ je konkávní; je-li $f''(x) > 0$, pak oblouk $y = f(x)$ je konvexní.*

Věta 6.33.2 (Nutná podmínka pro inflexní bod) *Je-li x_0 inflexním bodem, pak $f''(x_0) = 0$.*

Věta 6.33.3 (Dostatečné podmínky pro inflexní bod)
A) Jestliže $f''(x)$ mění znaménko, když x prochází x_0, pak x_0 je inflexním bodem.
B) Jesltiže $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, pak x_0 je inflexním bodem.
C) Jestliže $f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ aa n je liché, pak x_0 je inflexní bod.

6.34 Asymptoty křivky

A) Jestliže $\lim\limits_{x \to x_0\ (x_0^+, x_0^-)} f(x) = \infty$, křivka $y = f(x)$ má vertikální asymptotu $x = x_0$.

B) Jestliže $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k \in \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - Kx] = q \in \mathbb{R}$, křivka $y = f(x)$ má asymptotu danou rovnicí $y = kx + q$.

6.35 Obecné schéma pro vyšetřování průběhu funkce

Je nutno vyšetřit:

I. (a) Definiční obor D_f funkce $f(x)$.
(b) Body nespojitosti; intervaly spojitosti.
(c) Chování funkce v okolí bodů nespojitosti a vertikální asymptoty.
(d) Průsečíky se souřadnými osami.
(e) Symetrie grafu funkce (sudá, lichá).
(f) Periodičnost funkce.

II. Intervaly monotónnosti; body extrému a extrémy.

III. Intervaly konvexnosti a konkávnosti; inflexní body.

IV. Chování v nekonečnu, asymptoty se směrnicí.

6.36 Některé numerické metody řešení nelineárních rovnic a soustav rovnic

1. Metoda půlení (Metoda rozdělování úsečky na dva stejné díly)

Uvažujme rovnici
$$f(x) = 0,$$
kde funkce $f(x)$ je spojitá na $[a, b]$ a
$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$
Abychom našli kořen ležící v intervalu $[a, b]$, rozdělíme interval na polovinu. Jestliže $f((a+b)/2) = 0$, pak $\xi = (a + b)/2$ je kořenem rovnice. Jestliže
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0,$$
vybereme ten z intervalů $[a, (a+b)/2]$, $[(a+b)/2, b]$, v jehož koncových bodech má funkce $f(x)$ opačná znaménka. Tento nově vzniklý interval $[a_1, b_1]$ znovu rozpůlíme a zopakujeme postup, až nakonec během procesu buďto získáme přesný kořen nebo nekonečnou posloupnost vnořených intervalů
$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$$
takovou, že
$$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0, \; n = 1, 2, \ldots \tag{6.36.1}$$
a
$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a).$$
Pokud levé koncové body
$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$
tvoří monotónní neklesající omezenou posloupnost a pravé koncové body
$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$$
monotónní nerostoucí posloupnost, pak existuje společná limita
$$\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$
Přibližujeme-li se limitě v (6.36.1) pro $n \to \infty$, dostáváme $[f(\xi)]^2 \leq 0$, tedy $f(\xi) = 0$, což znamená, že ξ je kořenem rovnice. Je zřejmé, že
$$0 \leq \xi - a_n \leq \frac{1}{2^n}(b - a).$$

2. Metoda proporciálních částí

Předpokládejme, že $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Potom je místo půlení intervalu $[a, b]$ přirozenější rozdělit interval v poměru

$$f(a) : f(b)\ .$$

Tím dostáváme odpovídající hodnotu kořene

$$x_1 = a + h_1,$$

kde

$$h_1 = \frac{-f(a)}{-f(a) + f(b)} \cdot (b - a) = \frac{-f(a)}{f(b) - f(a)} \cdot (b - a).$$

Aplikujeme-li tento postup na interval $[a, x_1]$ nebo $[x_1, b]$ v jejichž koncových bodech má funkce $f(x)$ opačná znaménka, dostáváme druhou aproximacei kořene x_2, atd. Geometricky je metoda proporcionálních částí ekvivalentní nahrazení křivky

$$y = f(x)$$

tětivou procházející body $A[a, f(a)]$, $B[b, f(b)]$. Skutečně, rovnice tětivy AB je

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)}\ .$$

Položíme-li $x = x_1$ a $y = 0$, dostáváme

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)} \cdot (b - a).$$

Předpokládejme, že $f''(x) > 0$ pro $a \le x \le b$ (případ $f''(x) < 0$ se redukuje na náš případ, pokud napíšeme rovnici jako: $-f(x) = 0$). Pak bude křivka $y = f(x)$ *konkávní* a tedy bude ležet pod tečnou AB. Mohou nastat dva případy: $f(a) > 0$ a $f(a) < 0$.
V prvním případě je koncový bod a pevný a postupné aproximace

$$\begin{aligned} &x_0 = b, \\ &x_{n+1} = x_n - \tfrac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)} \cdot (x_n - a), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

tvoří omezenou posloupnost a

$$a < \xi < \cdots < x_{n+1} < x_n < \cdots < x_1 < x_0.$$

Ve druhém případě je koncový bod b pevný a postupné aproximace

$$\begin{aligned} &x_0 = a, \\ &x_{n+1} = x_n - \tfrac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)} \cdot (b - x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

tvoří omezenou rostoucí posloupnost a

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots < \xi < b.$$

Lze dokázat, že

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi, \quad \text{and} \quad f(\xi) = 0.$$

3. Newtonova metoda (Metoda tečen)

Nechť existuje kořen rovnice $f(x) = 0$. Newtonova metoda je ekvivalentní nahrazování malých částí oblouku křivky $y = f(x)$ tečnou vedenou bodem křivky. Předpokládejme, že $f''(x) > 0$ pro $a \le x \le b$ a $f(b) > 0$. Vyberme např. $x_0 = b$, pro nějž $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. Veďme tečnu ke křivce $y = f(x)$ bodem $B_0(x_0, f(x_0))$. Proprvní aproximaci x_1 kořene ξ vezměme úsek vyťatý na ose x touto tečnou. Bodem $B_1(x_1, f(x_1))$ znovu vedeme tečnu, jejíž x-ová souřadnice průsečíku dává druhou aproximaci x_2 kořene ξ atd. Je zřejmé, že rovnice tečny v bodě $B_n(x_n, f(x_n))$, $n = 0, 1, 2, \dots$ je

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n).$$

Položíme-li $y = 0$, $x = x_{n+1}$, dostáváme vzorec

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,. \tag{6.36.2}$$

Všimněme si, že v našem případě pokládáme $x_0 = a$ a tedy $f(x_0) \cdot f''(x_0) < 0$. Pokud bychom vedli tečnu ke křivce $y = f(x)$ bodem $A(a, f(a))$, dostali bychom bod x_1', který leží vně intervalu $[a, b]$ a metoda by selhala.

Věta 6.36.1 *Jestliže $f(a) \cdot f(b) < 0$, $f'(x)$, $f''(x)$ jsou nenulové a zachovávají zanménko na $a \le x \le b$, pak lze z počáteční aproximace $x_0 \in [a, b]$, pro niž $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ užitím Newtonovy metody* (6.36.2) *vypočítat samotný kořen ξ rovnice $f(x) = 0$ s libovolnou přesností.*

Pro přesnost dostáváme vzorec $|\xi - x_n| \le C \cdot (x_n - x_{n-1})^2$, kde C je jistá konstanta.

4. Iterační metoda

Nechť je dána rovnice

$$f(x) = 0, \tag{6.36.3}$$

kde $f(x)$ je spojitá funkce a chceme určit její reálné kořeny. Nahradíme (6.36.3) ekvivalentní rovnicí

$$x = \varphi(x). \tag{6.36.4}$$

Nějakým způsobem vybereme přibližnou hodnotu kořene, x_0, a dosadíme ji do správného člene (6.36.4), abychom získli číslo

$$x_1 = \varphi(x_0). \tag{6.36.5}$$

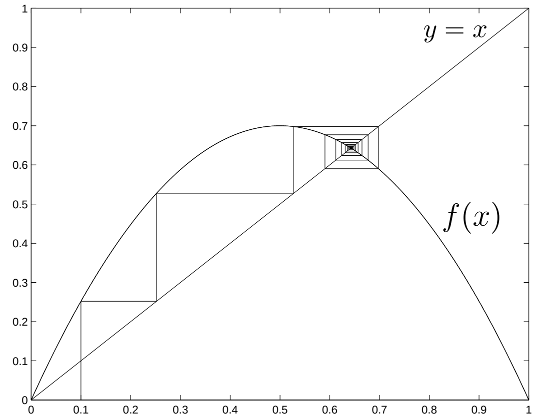
Nyní dosadíme x_1 do správného člene (6.36.5) za x_0 a dostaneme nové číslo $x_2 = \varphi(x_1)$. Opakováním tohoto procesu dostáváme posloupnost čísel

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots .$$

Je-li tato posloupnost konvergentní, pak limita

$$\xi = \lim_{n \to \infty} x_n$$

je kořenem (6.36.3).



Obrázek 6.36.1: Konvergující iterační proces

Věta 6.36.2 *Nechť funkce φ je definována a diferencovatelná na intervalu $[a, b]$ se všemi hodnotami $\varphi(x) \in [a, b]$. Pak existuje ryzí zlomek q takový, že*

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1$$

pro $a < x < b$. Pak iterační proces

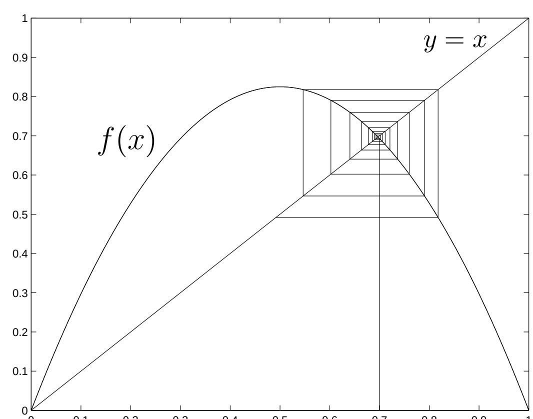
$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

konverguje, bez ohledu na počáteční hodnotu $x_0 \in [a, b]$; limitní hodnota $\xi = \lim_{n\to\infty} x_n$ je jediným kořenem rovnice

$$x = \varphi(x)$$

na intervalu $[a, b]$.

Poznámka 21 *Iterační proces může divergovat:*



Obrázek 6.36.2: Divergující iterační proces

5. Iterační metoda pro soustavu dvou rovnic

Nechť je dána rovnice o dvou neznámých

$$\begin{aligned} &F_1(x,y)=0,\\ &F_2(x,y)=0. \end{aligned} \tag{6.36.6}$$

Máme za úkol najít její reálné kořeny s předem danou přesností. Uvádíme iterační proces, který za jistých okolností dovoluje zlepšení přibližných hodnot kořenů. Za tím účelem zapíšeme (6.36.6) jako

$$\begin{aligned} &x=\varphi_1(x,y),\\ &y=\varphi_2(x,y), \end{aligned} \tag{6.36.7}$$

a zkonstruujeme postupné aproximace podle následujících vzorců:

$$\begin{aligned} &x_{n+1}=\varphi_1(x_n,y_n),\\ &y_{n+1}=\varphi_2(x_n,y_n),\\ &n=1,2,\dots. \end{aligned} \tag{6.36.8}$$

Existují-li limity

$$\xi=\lim_{n\to\infty}x_n,\quad \eta=\lim_{n\to\infty}y_n,$$

pak bod (ξ,η) je kořenem (6.36.6).

Věta 6.36.3 *Nechť je v uzavřeném intervalu $R=\{a\le x\le A, b\le x\le B\}$ jediný kořen $x=\xi, y=\eta$ of* (6.36.7). *Jsou-li $\varphi_1(x,y)$, $\varphi_2(x,y)$ spojitě diferencovatelné na R, počáteční aproximace (x_0,y_0) a všechny následující aproximace (x_n,y_n), $n=1,2,\dots$ patří do R;*

$$\begin{aligned} |\varphi'_{1x}(x,y)|+|\varphi'_{2x}(x,y)|\le q_1<1,\\ |\varphi'_{1y}(x,y)|+|\varphi'_{2y}(x,y)|\le q_2<1 \end{aligned}$$

pak proces postupných aproximací (6.36.8) *konverguje ke kořeni* (ξ,η) *soustavy* (6.36.7).

6. Přibližný výpočet

Pro iterační metodu máme

$$|\xi-x_n|\le\frac{q^n}{1-q}\cdot|x_1-x_0|.$$

Dá se dokázat, že

$$|\xi-x_n|\le\frac{q}{1-q}\cdot|x_n-x_{n-1}|.$$

Příklad 73 *Najděte reálné kořeny rovnice*

$$x-\sin x=0,25$$

na tři platné číslice.

Řešení. Napíšeme rovnici jako
$$x = \sin x + 0,25.$$
Graficky vidíme, že rovnice má v intervalu $[1,1; 1,3]$ jeden reálný kořen ξ, přibližně rovný $x_0 = 1,2$. Položme
$$\varphi(x) = \sin x + 0,25.$$
Protože $\varphi'(x) = \cos x$ a $|\varphi'(x)| \leq\approx 0,62 = q$, $x \in (0,9; 1,5)$, pak
$$x_n = \sin x_{n-1} + 0,25, \;\; n = 1, 2, \ldots.$$
Tyto odhady leží v intervalu $(0,9; 1,5)$ a $x_n \to \xi$ pro $n \to \infty$.
Sestrojíme posloupnost aproximací x_n, $n = 1, 2, \ldots$, až dvě sousední aproximace x_{n-1}, x_n budou vyhovovat požadavkům na chybu
$$\frac{1-q}{q} \cdot \varepsilon = 0,51 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \approx 0,0025.$$
Máme
$$\begin{aligned} x_1 &= \sin 1,2 + 0,25 = 1,182, \\ x_2 &= 1,175, \\ x_3 &= 1,173, \\ x_4 &= 1,172, \\ x_5 &= 1,172. \end{aligned}$$
Tedy $\xi = 1,17 \pm 0,005$.

7. Řešení rovnic pomocí programu MAPLE V

Příklad 74 *Najděte reálný kořen rovnice*
$$x - \sin x = 0,25$$
pomocí programu MAPLE V (viz Příklad 73).

Řešení. Napišm odpovídající příkaz v MAPLE:

```
s:=solve({x=sin(x)+0.25},{x});
```

Výsledek vypsaný programem MAPLE má tvar:

```
s:={x=1.171229653}
```

Příklad 75 *Najděte kořeny polynomické rovnice*
$$x^6 + 4x^5 + 4x^4 - x^2 - 4x - 4 = 0$$
pomocí MAPLE V.

Řešení. Napišme odpovídající příkaz v MAPLE:

```
s:=solve({x^6+4*x^5+4*x^4-x^2-4*x-4},{x});
```

Výsledek vypsaný programem MAPLE má tvar:

```
s:={x=1},{x=-1},{x=I},{x=-I},{x=-2},{x=-2}
```

Skutečně, rovnice může být zapsána ve tvaru:

$$x^6 + 4x^5 + 4x^4 - x^2 - 4x - 4 = (x^2 + 1)(x^2 - 1)(x + 2)^2 = 0.$$

Vyřešme tento příklad pomocí substituce:

```
poly:=x^6+4*x^5+4*x^4-x^2-4*x-4;
```

MAPLE dává:

$$poly := x^6 + 4x^5 + 4x^4 - x^2 - 4x - 4$$

Potom příkaz

```
solve(poly=0,x);
```

dává výsledek

```
1, -1, I, -I, -2, -2
```

Příklad 76 *Najděte kořeny polynomické rovnice*

$$x^3 - 6x + 2 = 0$$

pomocí MAPLE V.

Řešení. Obvyklý příkaz

```
s:=solve({x^3-6*x+2},{x});
```

dává jako výsledek nejasná transcendentní čísla. Pak je možno použít příkaz

```
s:=fsolve({x^3-6*x+2},{x});
```

Tak dostáváme

```
s:={x=-2.601679132},{x=.3398768866},{x=2.261802245}
```

Příklad 77 *Najděte kořeny polynomické rovnice*

$$x^4 + 4x + 1 = 0$$

pomocí MAPLE V.

Řešení. Obvyklý příkaz

```
s:=solve({x^4+4*x+1},{x});
```

odkazuje na kořeny téže rovnice

$$s := \{x = \mathrm{RootOf}(\_Z^4 + 4\_Z + 1)\}$$

Příkaz

```
s:=fsolve({x^4+4*x+1},{x});
```

dává pouzte reálné kořeny

```
s:={x=-1.493358557},{x=-.2509921575}
```

Všechna řešení této polynomiální rovnice dostaneme pomocí příkazu

```
s:=fsolve({x^4+4*x+1},{x}, complex);
```

Dostáváme

```
s:={x=-1.493358557},{x=-.2509921575},
{x=.8721753570-1.381031598*I},{x=.8721753570+1.381031598*I}
```

6.37 Vektorová funkce skalárního argumentu

1. Vektorová funkce. Hodograf.

Z vektorové algebry víme, že vektor $\vec{A}$, jehož průměty na osy jsou po řadě rovny x, y a z, lze zapsat jako

$$\vec{A} = x\vec{i} + y\vec{j} + z,\vec{k}$$

kde $\vec{i}, \vec{j}$ a $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory souřadných os. Jsou-li průměty x, y a z konstanty, říkáme, že vektor $\vec{A}$ je *konstantní.* Nyní předpokládejme, že průměty vektoru jsou funkce parametru t pohybujícího se v rozmezí daného intervalu:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t).$$

Pak říkáme, že vektor $\vec{A}$ sám je *variabilní:* každé hodnotě t parametru odpovídá jistá (vektorová) hodnota $\vec{A}$:

$$\vec{A}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Definice 90 *Jestliže každé hodnotě parametru t z daného intervalu odpovídá jistý vektor $\vec{A}(t)$, nazýváme $\vec{A}(t)$* vektorovou funkcí skalárního argumentu t.

Je pohodlné položit počátek vektoru $\vec{A}(t)$ do počátku souřadné soustavy; pak při změně hodnoty t koncový bod vektoru $\vec{A}(t)$ (se souřadnicemi $x(t), y(t), z(t)$) opíše křivku L, pro kterou vztahy

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

slouží jako parametrické rovnice.
Vektor $\vec{A}(t)$ není nic jiného než *radius vektor* $\vec{r}$ pohybujícího se bodu M křivky L. Tuto křivku lze specifikovat pomocí jediné *vektorové rovnice*

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Definice 91 *Křivka L popsaná koncovým bodem proměnného vektoru $\vec{A}(t)$ začínajícího v počátku se nazývá* hodograf *vektorové funkce $\vec{r} = A(t)$. Počátek se pak nazývá* pólem hodografu.

2. Limita a spojitost vektorové funkce

Definice 92 *Říkáme, že vektor $\vec{B}$ je* limitou vektorové funkce $\vec{A}(t)$ *as $t \to t_0$, zapisujeme*

$$\lim_{t \to t_0} \vec{A}(t) = B,$$

jestliže pro všechny hodnoty t ležící dostatečně blízko t_0 je modul rozdílu vektorů $|\vec{A}(t) - \vec{B}|$ libovolně malý.

Je-li

$$\vec{A}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

a

$$\vec{B} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k},$$

pak

$$|\vec{A}(t) - \vec{B}| = \sqrt{[x(t) - a]^2 + [y(t) - b]^2 + [z(t) - c]^2}.$$

Je zřejmé, že podmínka, aby se $|\vec{A}(t) - \vec{B}|$ blížilo k nule pro $t \to t_0$ má za důsledek $x(t) \to a$, $y(t) \to b$, $z(t) \to c$. Obrácené tvrzení platí samozřejmě také. Takže lze stručně prohlásit, že *průměty limit vektorové funkce $\vec{A}(t)$ jsou rovny limitám jejich průmětů.*

Definice 93 *Říkáme, že vektor $\vec{A}(t)$ je* spojitý *pro danou hodnotu t parametru, jestliže je definován v okolí bodu t a jestliže*

$$\lim_{\Delta t \to 0} |\vec{A}(t + \Delta t) - \vec{A}(t)| = \lim_{\Delta t \to 0} |\Delta \vec{A}(t)| = 0.$$

Nechť je rozklad vektoru $\vec{A}(t)$ na složky podle souřadných os

$$\vec{A}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Pak

$$\vec{A}(t + \Delta t) = x(t + \Delta t)\vec{i} + y(t + \Delta t)\vec{j} + z(t + \Delta t)\vec{k}$$

a, podle pravidel vektorové algebry,

$$\Delta \vec{A}(t) = \vec{A}(t + \Delta t) - \vec{A}(t) = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}\ ,$$

kde $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$ atd. Protože

$$|\vec{A}(t)| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2},$$

podmínka $|\Delta A(t)| \to 0$ implikuje, že $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\Delta z \to 0$. Obrácené tvrzení je také zřejmé: Jestliže $\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0$ jde k nule, $|\Delta A(t)|$ jde také k nule. To znamená, že spojitost vektorové funkce $\vec{A}(t)$ je ekvivalentní spojitosti jejích průmětů $x(t), y(t), z(t)$.

3. Derivace vektorové funkce

Zkonstruujme poměr
$$\frac{\Delta\vec{A}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{A}(t+\Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t}.$$

Definice 94 *Derivace vektorové funkce $\vec{A}(t)$ je limita (pokud existuje)*
$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{A}(t)}{\Delta t} = \vec{A}'(t) = \frac{d\vec{A}(t)}{\Delta t}.$$

Podle definice limity je derivace vektorové funkce také *vektor.*
Je-li modul vektorové funkce $\vec{A}(t)$ konstanta (zatímco směr se může měnit), její derivace $\vec{A}'(t)$ je *vektor kolmý k původnímu vektoru* $\vec{A}(t)$. Opravdu, v tomto případě leží hodograf na sféře, a tedy jeho derivace $\vec{A}'(t)$, tečna k hodografu, je kolmá k vektoru průvodiči $\vec{A}(t)$.
Tedy *derivace vektoru s konstantním modulem je k danému vektoru kolmá.*
Nyní prakticky určíme derivaci $\vec{A}'(t)$ dané vektorové funkce $\vec{A}(t)$. Nechť je vektorová funkce $\vec{A}(t)$ určena svým rozkladem
$$\vec{A}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Pak máme
$$\frac{\Delta\vec{A}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}.$$

Při limitním přechodu pro $\Delta t \to 0$ dostáváme
$$\vec{A}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}.$$

Z toho vyplývá, že
$$|\vec{A}'(t)| = \sqrt{\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2}.$$

4. Základní pravidla pro derivování vektorové funkce

Využijeme-li vyjádření derivace $\vec{A}'(t)$, lze lehce ukázat, že všechna základní pravidla o derivování pro saklární funkce lze téměř beze změny přenést na vektorové funkce:

1. $$[\vec{A}_1(t) + \vec{A}_2(t)]' = \vec{A}_1'(t) + \vec{A}_2'(t);$$

2. $$[f(t)\vec{A}_(t)]' = f'(t)\vec{A}_(t) + f(t)\vec{A}'(t)$$

   kde $f(t)$ je skalární funkce.

Pravidla pro derivování skalárního a vektorového součinu $\vec{A}_1(t)\cdot\vec{A}_2(t)$ a $\vec{A}_1(t)\times\vec{A}_2(t)$ dvou vektorových funkcí jsou také zcela analogické odpovídajícím pravidlům pro součin skalárních funkcí:

1. $$[\vec{A}_1(t)\cdot\vec{A}_2(t)]' = \vec{A}_1'(t)\cdot\vec{A}_2(t) + \vec{A}_1(t)\cdot\vec{A}_2'(t);$$

2. $$[\vec{A}_1(t)\times\vec{A}_2(t)]' = \vec{A}_1'(t)\times\vec{A}_2(t) + \vec{A}_1(t)\times\vec{A}_2'(t).$$

5. Aplikace v mechanice

Nechť t je čas pohybu a nechť hodograf vektorové funkce $\vec{r} = \vec{A}(t)$ je trajektorie bodu M. Vzdálenost bodu M od pevného počátečního bodu budeme označovat s a počítáme ji podle trajektorie a bereme se znamínkem + nebo − v závislosti na tom, zda se bod M od počátečního bodu pohybuje v kladném nebo záporném směru. Poloha bodu M je plně určena veličinou s, což je *křivková souřadnice* bodu M. Rovnice $s = s(t)$ vyjadřuje *zákon pohybu podél trajektorie.*
Podle definice je *rychlost v daném bodě M v daném časovém okamžiku t dána derivací vektorové funkce $\vec{r} = \vec{A}(t)$ podle času:*

$$v = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{A}'(t).$$

Následně *vektor rychlosti pohyblivého bodu je tečný vektor k trajektorii v odpovídajícím bodě ve směru pohybu. Modul rychlosti* je vyjádřen vztahem

$$|v| = |\vec{A}'(t)| = \frac{ds}{dt},$$

tedy, je roven *derivaci křivkové souřadnice s vzhledem k t.*
Je-li pohyb přímočarý, skalární veličina

$$\frac{ds}{dt}$$

plně určuje rychlost. Tuto veličinu nazýváme rychlostí přímočarého pohybu v daném bodě.
Vektor

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

se nazývá *zrychlení* pohybu.

6.38 Komplexní funkce reálné proměnné

1. Definice komplexní funkce

Předpokládejme, že je dána vektorová funkce skalárního argumentu, jejíž průmět na osu z je identicky roven nule pro všechny hodnoty parametru t. Pak

$$\vec{A}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \tag{6.38.1}$$

a křivka $\vec{r} = \vec{A}(t)$ leží celá v rovině Oxy. V tomto případě je vhodné uvažovat vektor

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

jako geometrický obraz komplexního čísla $z = x + iy$ a mluvit, ve shodě s tímto, místo o vektorové funkci $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ o komplexní funkci $z(t) = x(t) + iy(t)$ reálné proměnné t.

Definice 95 *Je-li každé hodnotě reálného parametru t přiřazeno komplexní číslo*

$$z(t) = x(t) + iy(t), \tag{6.38.2}$$

kde $x(t)$ a $y(t)$ jsou funkce nabývající reálných hodnot, $z(t)$ se nazývá komplexní funkce *reálného argumentu t.*

Parametr t se pohybuje uvnitř intervalu. *Hodograf* komplexní funkce $z(t) = x(t) + iy(t)$ je podle definice křivka s parametrickými rovnicemi $x = x(t)$, $y = y(t)$; tedy hodograf vektorové funkce (6.38.1) a komplexní funkce (6.38.2) jsou totožné. Definice limity a spojitosti komplexní funkce jsou zcela analogické odpovídajícím definicím pro vektorové funkce. Všimněte si, že spojitost komplexní funkce $z(t) = x(t)+iy(t)$ je ekvivalentní spojitosti její reálné a imaginární části $x = x(t)$ and $y = y(t)$. Hodograf spojité funkce $z(t)$ vykreslený pro parametr t v intervalu (t_1, t_2) je spojitá čára spojující body $z(t_1)$ a $z(t_2)$ v komplexní rovině.

Příklad 78 *Pro funkci*

$$z(t) = t + it^2, \qquad t \in (-\infty, +\infty)$$

máme $x = t$ a $y = t^2$. Hodografem je parabola $y = x^2$. Pro t nabývající hodnot od $-\infty$ do $+\infty$ opíše pohyblivý bod paraboly křivku tak, že horní (nekonečná) oblast omezená parabolou zůstává vždy vlevo.

2. Derivace komplexní funkce reálné proměnné

Derivace komplexní funkce $z(t)$ je definována běžným způsobem, tj. jako podíl přírůstku funkce $\Delta z = z(t + \Delta) - z(t)$ a přírůstku nezávisle proměnné Δt:

$$z'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}\,.$$

Tedy derivace $z'(t)$ je komplexní funkcí téhož argumentu. Geometricky lze derivaci interpretovat tak, že vektor odpovídající komplexnímu číslu $z'(t_0)$ je rovnoběžný s tečnou k hodografu funkce $z(t)$ v bodě hodografu, který odpovídá hodnotě parametru $t = t_0$. Pro danou komplexní funkci $z(t) = x(t) + iy(t)$ dostáváme vztah pro derivování

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t).$$

Tento vztah naznačuje, že komplexní funkce $z(t) = x(t) + iy(t)$ může být derivována jednoduše jako lineární kombinace, v níž i je považováno za běžnou konstantu.

Kapitola 7

Diferenciální počet funkcí více proměnných

7.1 Diferenciální počet funkcí více proměnných

1. Funkce v $\mathbb{R}^n$

Definice 96 *y se nazývá funkce proměnných*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

definovaná na množině $D \subset \mathbb{R}^n$, jestliže je každému bodu množiny $\mathbb{R}^n$ přiřazena určitá hodnota proměnné y.

Označujeme:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

nebo stručně:

$$y = f(x).$$

Množina D se nazývá definičním oborem funkce f. Jestliže $D \subset \mathbb{R}^2$, užíváme zkrácený zápis $z = f(x, y)$. Skutečnost $D \subset \mathbb{R}^3$ často zapisujeme $u = f(x, y, z)$. Jako příklad mohou sloužit funkce $y = x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \cdots + x_n^n$ and $y = \exp \frac{x_1}{x_2} + x_3 x_4$.
Je-li $z = f(x, y)$ funkce dvou nezávisle proměnných x a y, jejím grafem je množina bodů, jejichž x-ovými a y-ovými souřadnicemi jsou hodnoty x a y a třetí souřadnice je odpovídající hodnota z, tj. množina bodů $(x, y, f(x, y))$. Grafem funkce definované na oblasti roviny je obvykle plocha.

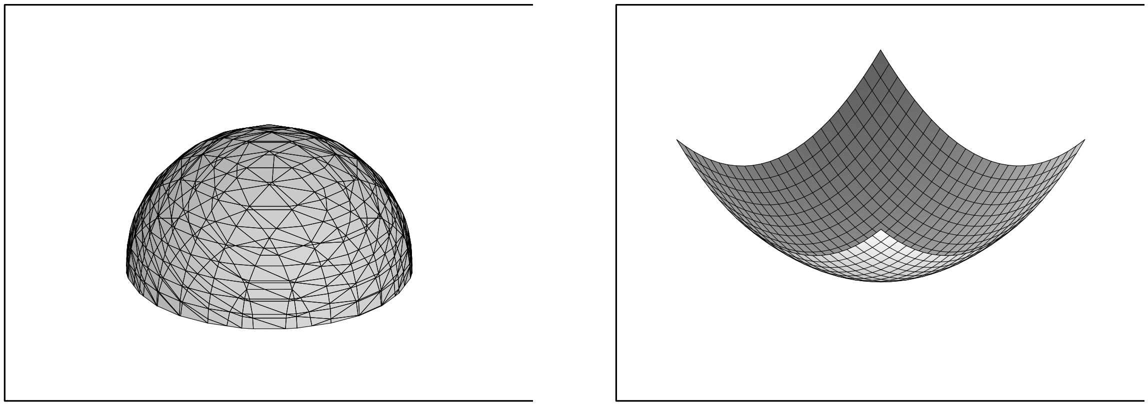
Příklad 79 *Plocha daná vztahem*

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

je horní polokoule. Plocha daná vztahem

$$z = x^2 + y^2$$

je rotační paraboloid (viz. Obrázek 7.1.1).



Obrázek 7.1.1: Horní polokoule a rotační paraboloid

2. Limita funkce

Definice 97 *Říkáme, že funkce $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ má v bodě $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ limitu rovnou číslu A, jestliže funkce je definována v okolí x^0 s výjimkou nejvýše bodu x^0 samotného a jestliže pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že*

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

pro všechna $x \neq x^0$ splňující nerovnost

$$|x_i - x_i^0| < \delta, \ \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Z této definice vyplývá, že pokud limita A existuje, pak je jediná. Taková limita se nazývá **vlastní**. Jestliže $A = \infty$ (pokuste se modifikovat výše uvedenou definici pro tento případ), pak se limita nazývá **nevlastní**. Pro označení tohoto faktu užíváme následující zápis

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = A$$

nebo

$$\lim_{\substack{x_i \to x_i^0 \\ i = 1, 2, \ldots, n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A.$$

Příklad 80 *Najděte* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$ *kde*

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \ .$$

Sestavíme tuto pomocnou nerovnost:

$$(x^3 + y^3)^2 = x^6 + 2x^3y^3 + y^6 < 2(x^6 + y^6) < 2(x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6) = 4(x^2 + y^2)^3.$$

Tedy

$$|x^3 + y^3| < 2(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$$

a

$$|f(x, y)| < 2\sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Nyní je zřejmé, že

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = 0.$$

Příklad 81 *Existuje*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \varphi(x, y)$$

pro

$$\varphi(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \;?$$

a) Nechť $y = x$*. Pak*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \varphi(x, y) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - x^2}{x^2 + x^2} = 0$$

Tedy jestliže A *existuje, pak* $A = 0$.
b) Nechť $y = 2x$*. Pak*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \varphi(x, y) = \lim_{x \to 0} \frac{-3x^2}{5x^2} = -\frac{3}{5}\;.$$

Vidíme, že funkce $\varphi(x, y)$ *nemá limitu v bodě* $(0, 0)$.

Uvedeme některá užitečná pravidla pro výpočet limity (předpokládáme existenci vlastních limit $\lim_{x \to x_0} f(x) = F$, $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \Phi$):

1. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = F \pm \Phi$

2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\varphi(x) = F \cdot \Phi$

3. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{F}{\Phi}$

jestliže $\varphi(x) \neq 0$ a $\Phi \neq 0$.

3. Spojitost funkce

Definice 98 *Říkáme, že funkce* $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *je spojitá v bodě* $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, *jestliže je definována v okolí bodu* x^0 *včetně bodu* x^0 *samotného a jestliže*

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = f(x^0).$$

Příklad 82 *Je funkce*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & jestlie \quad x^2+y^2 > 0, \\ 0 & jestlie \quad x = y = 0 \end{cases}$$

spojitá v bodě $(0,0)$? *Ano, protože podle Příkladu 80*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) = 0 = f(x,y).$$

Podmínka spojitosti funkce f v bodě x^0 může být přepsána ve tvaru:

$$\lim_{h \to 0} f(x^0 + h) = f(x^0),$$

kde $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$.
Přírůstek (nebo **absolutní přírůstek**) funkce f v bodě x^0 odpovídající přírůstku h vektorového argumentu je definován následovně:

$$\Delta f(x^0) = f(x^0 + h) - f(x^0).$$

Můžeme tedy přepsat definici spojitosti f v bodě x^0 pomocí přírůstků:
Funkce je spojitá v x^0, jestliže

$$\lim_{h \to 0} \Delta f(x^0) = 0$$

kde

$$\Delta f(x^0) = f(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2, \ldots, x_n^0 + h_n) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0).$$

Obvyklá pravidla pro počítání se spojitými funkcemi nadále platí, např. součet, rozdíl, součin a podíl dvou funkcí $f(x)$ a $\varphi(x)$ je spojitý v bodě x^0, pokud jsou zde spojité funkce $f(x)$ a $\varphi(x)$ (pro podíl navíc požadujeme, aby $\varphi(x^0) \neq 0$).

4. Parciální derivace

Definice 99 *Parciální derivace* $f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ *vzhledem k nezávisle proměnné* x_j *v bodě* $(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ *je definována jako limita*

$$f'_{x_j}(x_1, x_2 \ldots, x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[f(x_1, x_2 \ldots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2 \ldots, x_n) \right],$$

kde $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *za předpokladu, že existuje.*

Používáme následující označení: f'_{x_j}, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Poznámka 22 *Parciální derivace f'_{x_j} není nic jiného než derivace funkce $f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$, na niž pohlížíme jako na funkci proměnné pouze x_j pro pevná $x_1, x_2 \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$.*

Příklad 83 *Jako příklad uveďme funkci $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^5 x_3^7$ a $f'_{x_3}(x_1, x_2, x_3) = 7x_1 x_2^5 x_3^6$.*

5. Geometrický význam parciální derivace

Funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ geometricky představuje místo bodů $(x, y, f(x, y))$, kde $(x, y) \in D_f$, tedy plochou v třídimenzionálním prostoru, v němž jsou zavedeny pravoúhlé kartézské souřadnice (x, y, z). Derivace $f'_x(x_0, y_0)$ (za předpokladu, že existuje) je rovna tangentu úhlu svíraného tečnou k této části plochy a osou x vedenou v rovině $y = y_0$ bodem x_0.
Analogicky interpretujeme význam parciální derivace $f'_y(x, y)$.

6. Gradient

Vektor

$$\operatorname{grad} \omega(x) = \left(\omega'_{x_1}(x), \omega'_{x_2}(x), \ldots, \omega'_{x_n}(x)\right)$$

se nazývá gradient funkce ω v bodě x. Používáme následující označení: $\operatorname{grad} \omega(x)$, $\nabla \omega(x)$ (nabla).

Věta 7.1.1 *Gradient funkce*

$$F(x, y, z) \equiv z - f(x, y)$$

je kolmý k tečné rovině vedené bodem (x, y, z) plochy $z = f(x, y)$.

K důkazu: Rovnice tečné roviny v bodě (x_0, y_0) plochy $(x, y, (f(x, y))$, $z = f(x, y)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$ je:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

a tečný vektor T_x, T_y má souřadnice:

$$T_x = (1, 0, f'_x(x_0, y_0)), \quad T_y = \left(0, 1, f'_y(x_0, y_0)\right).$$

Vypočtěte $\nabla F = \left(-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1\right)$. Pak oba skalární součiny jsou rovny nule:

$$(T_x, \nabla F) = 0, \quad (T_y, \nabla F) = 0$$

a následně

$$\nabla F \ \perp TP \text{ (tečná rovina).}$$

Věta 7.1.2 *Derivace funkce $f(x)$ ve směru jednotkového vektoru ω je rovna průmětu gradientu f v tomto bodě do daného směru:*

$$\frac{\partial f}{\partial \omega} = (\operatorname{grad} f, \omega) = \operatorname{grad}_\omega f.$$

Důkaz. Zřejmě

$$(\operatorname{grad} f, \omega) = |\operatorname{grad} f|\,|\omega| \cdot \cos(\operatorname{grad} f, \omega) = |\operatorname{grad} f| \cdot \cos(\operatorname{grad} f, \omega) = \operatorname{grad}_{\omega} f.$$

Věta 7.1.3 *Směrová derivace funkce f je maximální, jestliže gradient f je rovnoběžný s ω.*

Důkaz. Protože maximální hodnoty je dosaženo, jestliže

$$\frac{\partial f}{\partial \omega} = |\operatorname{grad} f| \cdot \cos(\operatorname{grad} f, \omega) = |\operatorname{grad} f|,$$

tj. jestliže $\cos(\operatorname{grad} f, \omega) = 1$, pak zjevně $\operatorname{grad} f \parallel \omega$.

Kapitola 8

Diferenciální počet funkcí více proměnných 2.

7. Parciální derivace vyšších řádů

Derivace f'_{x_j}, $j = 1, 2, \ldots, n$ se nazývají také parciální derivace prvního řádu (první parciální derivace) funkce f. Výrazy

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\,, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

(nebo $f''_{x_i x_j}$) se nazývají parciální derivace druhého řádu (druhé parciální derivace). Pro $i = j$ je označujeme jako

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

(nebo $f''_{x_i^2}$). Analogicky definujeme parciální derivace vyšších řádů, např.

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \cdots \frac{\partial}{\partial x_k}}_{m\ -\text{krát}} = \frac{\partial^m}{\partial x_k^m}$$

nebo

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial^5}{\partial z \partial y^2 \partial z \partial x}\ .$$

8. Nezávislost smíšených derivací na pořadí derivování

Derivace $f''_{x_i x_j}, f'''_{x_i^2 x_j}$, $i \neq j$ apod. se nazývají smíšené parciální derivace.

Věta 8.0.4 *Nechť je funkce $z = f(x, y)$ definována na otevřené množině G roviny xy. Jestliže má parciální derivace f''_{xy} a f''_{yx} v bodě $(x, y) \in G$, jsou si v tomto bodě tyto derivace rovny.*

$$f''_{xy} = f''_{yx}\,.$$

Věta 8.0.5 *Jestliže všechny parciální derivace funkce*

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

(příslušné danému vektoru $K = (k_1, \dots, k_n)$ s celočíselnými souřadnicemi, které vyjadřují maximální parciální derivace vzhledem k proměnným $x_1, x_2, \dots, x_n$) jsou spojité na $\mathbb{R}^n$ v bodě x, pak lze libovolně změnit pořadí derivování v libovolné z těchto derivací bez vlivu na konečný výsledek.

Příklad 84

$$\frac{\partial^5 f}{\partial z \partial y^2 \partial z \partial x} = \frac{\partial^5 f}{\partial z^2 \partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^5 f}{\partial x \partial y^2 \partial z^2}.$$

Příklad 85

$$z = x^3y^2, z'_x = 3x^2y^2, z'_y = 2x^3y, z''_{xy} = 6x^2y = z''_{yx}.$$

9. Diferencovatelná funkce. Totální diferenciál.

Definice 100 *Říkáme, že funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je diferencovatelná v daném bodě $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, jestliže její celkový přírůstek (nebo stručně přírůstek) lze zapsat ve tvaru*

$$\Delta f(x) = f'_{x_1}(x)h_1 + f'_{x_2}(x)h_2 + \cdots + f'_{x_n}(x)h_n + \varepsilon(h)\|h\|,$$

kde $\|h\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_n^2}$ je funkce taková, že $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Definice 101 *Hlavní část celkového přírůstku se nazývá* **totální diferenciál** *(nebo stručně* **diferenciál***) funkce, tj.*

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(x)h_i.$$

Zřejmě $dx_i = h_i$, $(dx = \Delta x = (x+h)-x = h; dx_i = \Delta x_i = (x_i+h_i)-x_i = h_i, i = 1, \dots, n)$. Říkáme, že funkce diferencovatelná v každém bodě určité oblasti je diferencovatelná na této oblasti.

Poznámka 23 *Totální diferenciál můžeme v tom případě zapsat takto:*

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(x)dx_i.$$

Příklad 86 *Nechť $z = 3axy - x^3 - y^3$, $a \in \mathbb{R}$. Pak*

$$dz = (3ay - 3x^2)dx + (3ax - 3y^2)dy.$$

Jestliže například $z = z_0 = (1, 2)$, pak

$$dz(1, 2) = (6a - 3)dx + (3a - 12)dy.$$

Příklad 87 *Pro funkci* $z = x^y$, $x > 0$ *dostáváme*

$$dz = (yx^{y-1})dx + (x^y \ln x)dy.$$

Můžeme formulovat následující pravidla pro diferenciály:

$$d(u \pm v) = du \pm dv,$$

$$d(uv) = du \cdot v + v \cdot du,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v^2}(vdu - udv), \text{ if } v \neq 0.$$

Příklad 88 *(Tento příklad ukazuje, že existence parciální derivace není dostatečným předpokladem diferencovatelnosti funkce.) Je funkce*

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

diferencovatelná v bodě $(0, 0)$? *Vypočteme parciální derivace*

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{|xy|}} \cdot (|xy|)'_x = \frac{|y|\mathrm{sign}x}{2\sqrt{|xy|}} = \frac{\sqrt{|y|}\mathrm{sign}x}{2\sqrt{|x|}} \text{ pro } xy \neq 0$$

a

$$f'_y(x, y) = \frac{\sqrt{|x|}\mathrm{sign}y}{2\sqrt{|y|}} \text{ pro } xy \neq 0.$$

Tyto vztahy nejsou vhodné pro výpočet hodnot $f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)$. *Pro výpočet těchto hodnot musíme postupovat podle definice:*

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(h, 0) - f(0, 0)) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot 0 = 0$$

a podobným způsobem dostáváme

$$f'_y(0, 0) = 0.$$

Nyní vypočteme

$$\Delta f(x, y)|_{(0,0)} = 0 \cdot h_1 + 0 \cdot h_2 + \varepsilon(h_1, h_2)\sqrt{h_1^2 + h_2^2}$$

a

$$\Delta f(0, 0) = f(h_1, h_2) - f(0, 0) = \sqrt{|h_1 h_2|} = \frac{\sqrt{|h_1 h_2|}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \cdot \sqrt{h_1^2 + h_2^2}.$$

Je vidět, že můžeme položit

$$\varepsilon(h_1, h_2) = \frac{\sqrt{|h_1 h_2|}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

Bohužel limita

$$\lim_{h_1 \to 0, h_2 \to 0} \varepsilon(h_1, h_2)$$

neexistuje, neboť např. pro $h_1 = h_2$:

$$\lim_{h_1 \to 0} \varepsilon(h_1, h_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

a pro $h_1 = 2h_2$:

$$\lim_{h_1 \to 0} \varepsilon(h_1, h_1/2) = \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Tedy funkce $f(x, y)$ není diferencovatelná.

10. Diferenciály vyšších řádů

Definice 102 *Druhý diferenciál funkce $f(x)$ (kde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$) odpovídající nezávislým přírůstkům (diferenciálům) $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ je definován rovnostmi*

$$d^2 f = d(df).$$

Obecně je diferenciál l-tého řádu (l-tý diferenciál) funkce f pro nezávislé diferenciály $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ definován indukcí pomocí rekurentní formule

$$d^l f = d(d^{l-1} f),\ l = 2, 3, \ldots\ .$$

Pro nezávisle proměnné $x_1, x_2, \ldots, x_n$ máme $dx_j = \Delta x_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Diferenciály dx_j budeme také nazývat nezávislé diferenciály, abychom zdůraznili, že jsou nezávislé na $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. „Nezávislost“ veličin dx_j se formálně ukazuje v průběhu derivování: derivujeme-li vzhledem k $x_1, x_2, \ldots, x_n$, považujeme ostatní nezávisle proměnné za konstanty, tj. $d(dx_j) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Příklad 89 *Vypočtěme druhý diferenciál*

$$d^2 f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} d^2 f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= d(df(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \\ &= d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\right) dx_i + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} d(dx_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j dx_i. \end{aligned}$$

Proto např.

$$d^2 f(x, y) = f''_{xx}(dx)^2 + 2f''_{xy} dx dy + f''_{yy}(dy)^2.$$

Zaveďme operátor

$$D_n = \frac{\partial\,\cdot}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial\,\cdot}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial\,\cdot}{\partial x_n} dx_n,$$

se kterým zacházíme podle vztahu

$$D_n f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \ .$$

Pak lze lehce ověřit, že

$$d^k f = (D_n)^k f.$$

Např. pro případ $n = 2, k = 2$ máme

$$(D_2)^2 = \left(\frac{\partial\,\cdot}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial\,\cdot}{\partial x_2} dx_2\right)^2 =$$

$$= \frac{\partial^2\cdot}{\partial x_1^2}(dx_1)^2 + 2\frac{\partial^2\cdot}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2\cdot}{\partial x_2^2}(dx_2)^2.$$

Nakonec dostáváme

$$d^2 f(x,y) = D_2^2 f(x,y) = f''_{xx}(dx)^2 + 2f''_{xy} dx dy + f''_{yy}(dy)^2.$$

V obecném případě dostáváme pro $n = 2$ (podle binomické věty)

$$(D_2)^k = \left(\frac{\partial\,\cdot}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial\,\cdot}{\partial x_2} dx_2\right)^k =$$

$$= \frac{\partial^k\cdot}{\partial x_1^k}(dx_1)^k + \binom{k}{1}\frac{\partial^k\cdot}{\partial x_1^{k-1}\partial x_2}(dx_1)^{k-1}dx_2 +$$

$$+ \binom{k}{2}\frac{\partial^k\cdot}{\partial x_1^{k-2}\partial x_2^2}(dx_1)^{k-2}dx_2^2 + \cdots + \binom{k}{p}\frac{\partial^k\cdot}{\partial x_1^{k-p}\partial x_2^p}(dx_1)^{k-p}dx_2^p + \cdots +$$

$$+ \binom{k}{k-1}\frac{\partial^k\cdot}{\partial x_1 \partial x_2^{k-1}} dx_1 (dx_2)^{k-1} + \frac{\partial^k\cdot}{\partial x_2^k}(dx_2)^k \ .$$

11. Rovnice tečné roviny k ploše

Nechť je dána funkce $z = f(x,y) \in C^1(\mathcal{D}, \mathbb{R})$, kde $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{\in}$ je otevřená oblast. Předpokládejme, že $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$. Množina bodů $(x, y, f(x,y))$ generuje plochu S. Uvažujme řezy plochy S rovnami $y = y_0$ a $x = x_0$. Veďme tečny M_0T_x a M_0T_y bodem $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$ k rovinným křivkám vzniklým v řezech. Rovina T procházející těmito přímkami, které se protínají v bodě M_0, se nazývá tečná rovina k ploše S v bodě M_0, bod M_0 se nazývá bodem dotyku roviny T a plochy S.

Přímka M_0T_x je určena rovnicemi

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0), \ \ y = y_0,$$

a přímkou M_0T_y :

$$z - z_0 = f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \ \ x = x_0.$$

Rovnici roviny T procházející body $M_0(x_0, y_0, z_0)$ lze vyjádřit jako

$$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0).$$

Protože $M_0T_x \subset T$, $M_0T_y \subset T$, dostáváme $A = f'_x(x_0, y_0), B = f'_y(x_0, y_0)$ a rovnice T bude mít tvar

$$\boxed{z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).}$$

12. Geometrická interpretace totálního diferenciálu funkce dvou proměnných

Lehce nahlédneme, že z rovnice tečné roviny vyplývá

$$\Delta z_T = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y,$$

kde $\Delta z = z - z_0$, $\Delta x = x - x_0$ a $\Delta y = y - y_0$. Protože x a y jsou nezávisle proměnné, poslední rovnici lze napsat ve tvaru

$$\Delta z_T = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy$$

a nebo v následujícím tvaru (který udává také stručný tvar rovnice tečné roviny)

$$\boxed{\Delta z_T = dz}$$

kde

$$dz = f'_x dx + f'_y dy.$$

Věta 8.0.6 *Totální diferenciál funkce $z = f(z, y)$ je roven přírůstku z na tečné rovině vedené ke grafu funkce odpovídajícím bodem.*

Má-li x přírůstek Δx a y přírůstek Δy, pak funkce z má odpovídající přírůstek Δz reprezenotvaný úsečkou R_1M_1 rovnou přírůstku na souřadnici z příslušného bodu plochy S (tj. $R_1M_1 = \Delta z$), zatímco diferenciál dz je reprezentován úsečkou R_1T_1, což je přírůstek souřadnice z příslušného bodu tečné roviny T (tj. $R_1T_1 = dz$).

13. Aplikace totálního diferenciálu na přibližné výpočty

Připomeňme definici diferencovatelné funkce

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(x) h_i + \varepsilon(h) \sqrt{\sum_{i=1}^{n} h_i^2}$$

nebo, stručněji

$$\Delta f(x) = df(x) + \varepsilon(\Delta x)||\Delta x||,$$

kde $\Delta x = h$, (i.e. $\Delta x_1 = h_1, \Delta x_2 = h_2, \ldots, \Delta x_n = h_n$), $\Delta x_i = (x_i + h_i) - x_i$ a $||\Delta x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2}$. Odtud vyplývá:

$$\boxed{\Delta f(x) \approx df(x) \text{ if } \Delta x \to 0 \text{ a } df(x) \neq 0 \text{ for } \Delta x \neq 0.}$$

Tento přibližný vzorec může být dokázán vzhledem k tomu, že

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0.$$

Lze určit chybu tohoto vzorce.

Příklad 90 *Napišme přibližný vzorec pro výpočet hodnot funkce*

$$z = \ln(xy + 2y^2 - 2x)$$

v okolí bodu $(1, 1)$.
Máme $x_0 = 1, y_0 = 1$,

$$z'_x(x, y) = \frac{y - 2}{xy + 2y^2 - 2x}\ , \quad z'_x(1, 1) = -1,$$

$$z'_y(x, y) = \frac{x + 4y}{xy + 2y^2 - 2x}\ , \quad z'_y(1, 1) = 5,$$

a $z(1, 1) = 0$. *Tedy v okolí bodu* $(1, 1)$

$$\ln(xy + 2y^2 - 2x) \approx -(x - 1) + 5(y - 1).$$

Pro $x = y = 1,1$

$$\ln(1,1^2 + 2 \cdot 1,1^2 - 2,2) \approx -0,1 + 5 \cdot 0,1 = 0,4$$

a přesnější hodnota je

$$\ln(1,1^2 + 2 \cdot 1,1^2 - 2,2) = \ln 1,43 \approx 0,357.$$

14. Derivace složené funkce

Věta 8.0.7 *Nechť je funkce $u = f(x,y,z)$ diferencovatelná v bodě $(x,y,z) \in G$ a nechť funkce*

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t) \tag{8.0.1}$$

závislé na skalárním argumentu t mají derivace vzhledem k t. Pak derivaci složené funkce vzhledem k t

$$u = F(t) = f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$$

(tedy derivace f podél křivky určené vlastnostmi (8.0.1)*) lze vyjádřit vzorcem*

$$F'(t) = f'_x(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\varphi'(t) + \\ + f'_y(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\psi'(t) + f'_z(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\chi'(t).$$

Analogicky pokud např. $z = f(u,v)$, kde $u = \varphi(x,y)$ a $v = \psi(x,y)$, pak parciální derivace funkce

$$z = F(x,y) = f(\varphi(x,y), \psi(x,y))$$

jsou vyjádřeny vztahy

$$z'_x = F'_x = f'_u(\varphi(x,y), \psi(x,y))\varphi'_x(x,y) + f'_v(\varphi(x,y), \psi(x,y))\psi'_x(x,y),$$

$$z'_y = F'_y = f'_u(\varphi(x,y), \psi(x,y))\varphi'_y(x,y) + f'_v(\varphi(x,y), \psi(x,y))\psi'_y(x,y).$$

Výše uvedená pravidla lze aplikovat na funkce libovolného počtu nezávisle proměnných a libovolného počtu přechodných argumentů. Všimněme si rozdílu mezi derivacemi

$$\frac{dz}{dx} \quad \text{a} \quad \frac{\partial z}{\partial x}\ .$$

Zatímco první je totální derivace, tj. obyčejná derivace z jako funkce x, druhé je (explicitní) parciální derivace z vzhledem k argumentu x vystupujícímu v původním vyjádření funkce, tj. vypočtená za předpokladu, že všechny ostatní argumenty, ač závislé na x ve složené funkci, jsou v tomto procesu derivování považovány za konstanty.

Příklad 91 *Uvažujme funkci*

$$z = e^u \sin v\ ,$$

kde pokládáme $u = xy$ a $v = x + y$. Pak

$$z'_x = e^{xy} y \sin(x+y) + e^{xy}\cos(x+y) = e^{xy}[y\sin(x+y) + \cos(x+y)],$$

$$z'_y = e^{xy} x \sin(x+y) + e^{xy}\cos(x+y) = e^{xy}[x\sin(x+y) + \cos(x+y)].$$

Příklad 92 *Nechť*
$$z = x^3 e^{u^2},$$
kde u je funkce proměnné x, tj. $u = \varphi(x)$. Pak
$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = 3x^2 e^{u^2}$$
a
$$\frac{dz}{dx} = 3x^2 e^{u^2} + x^3 e^{u^2} 2u\varphi'(x)$$
nebo
$$\frac{dz}{dx} = 3x^2 e^{\varphi^2(x)} + 2x^3 e^{\varphi^2(x)} \varphi(x)\varphi'(x).$$
Derivace vyšších řádů vypočteme analogicky.

15. Směrová derivace

Definice 103 *Nechť $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ jsou libovolné pevné* **jednotkové** *vektory. (Směrová) derivace funkce f v bodě $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ve směru vektoru ω (podél ω) je limita*
$$f'_\omega(x) = \frac{\partial f}{\partial \omega}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x + t\omega) - f(x)}{t}$$
(za předpokladu, že existuje).

Věta 8.0.8 *Je-li funkce f diferencovatelná v bodě*
$$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0),$$
pak existuje její derivace ve směru libovolného jednotkového vektoru
$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$$
a lze ji vyjádřit vztahem
$$\frac{\partial f}{\partial \omega}(x^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)\cdot\omega_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0)\cdot\omega_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)\cdot\omega_n.$$

Poznámka 24 *Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, jsou směrové derivace podle vektorů $(\underbrace{0, 0, 0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, 0, \ldots, 0)$.*

Geometrický význam. Je-li $z = f(x, y)$, pak $f'_\omega(P)$ je rovno tangentu úhlu sevřeného tečnou k řezu plochy $z = f(x, y)$ rovinou kolmou k rovině xy a procházející vektorem $\omega = (\omega_1, \omega_2)$.

Příklad 93 *Najděte derivaci funkce $u = xy^2z^3$ v bodě $M(3, 2, 1)$ ve směru vektoru $\omega_1 = (2, 2, 1)$.*
Řešení. Vektor ω_1 není jednotkový. Proto vypočteme
$$\omega = \frac{\omega_1}{|\omega_1|} = \frac{(2, 2, 1)}{\sqrt{9}} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$
a
$$u'_\omega(M) = y^2z^3\big|_M \cdot \frac{2}{3} + 2xyz^3\big|_M \cdot \frac{2}{3} + 3\,xy^2z^2\big|_M \cdot \frac{1}{3} = 4\cdot\frac{2}{3} + 12\cdot\frac{2}{3} + 36\cdot\frac{1}{3} = 22\frac{2}{3}.$$

16. Taylorův vzorec

Uvažujme dva body $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $P^0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Taylorův vzorec pro funkci $f(x)$ n proměnných v bodě P^0 se zbytkem R_n v Lagrangeově tvaru lze vyjádřit jako:

$$f(P) = f(P^0) + \frac{1}{1!}df(P^0) + +\frac{1}{2!}d^2f(P^0) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}d^{(n-1)}f(P^0) + R_n,$$

kde

$$R_n = \frac{1}{n!}d^nf(P^0 + \theta\cdot(P - P^0)),\ \theta\in(0,1),\ \theta = \text{const.}$$

Bod $P^0 + \theta\cdot(P - P^0)$ lze vyjádřit v souřadnicovém tvaru jako

$$P^0 + \theta\cdot(P - P^0) = (x_1^0 + \theta\cdot(x_1 - x_1^0), x_2^0 + \theta\cdot(x_2 - x_2^0), \ldots, x_n^0 + \theta\cdot(x_n - x_n^0)).$$

Příklad 94 *Rozviňme podle Taylorova vzorce funkci $z = x^y$ v okolí bodu $(1,\,1)$ pro $n = 3$.*
Řešení. *Nejprve vypočteme parciální derivace:*

$$z'_x = yx^{y-1},\ \ z'_y = x^y\ln x,$$

$$z''_{x^2} = y(y-1)x^{y-2},\ \ z''_{xy} = x^{y-1}(1 + y\ln x),\ \ z''_{y^2} = x^y(\ln x)^2,$$

$$z'''_{x^3} = y(y-1)(y-2)x^{y-3},\ \ z'''_{y^3} = x^y(\ln x)^3,$$

$$z'''_{x^2y} = (y-1)x^{y-2}(1 + y\ln x) + x^{y-1}\cdot\frac{y}{x} = x^{y-2}\left((y-1)(1 + y\ln x) + y\right),$$

$$z'''_{xy^2} = yx^{y-1}(\ln x)^2 + 2x^y\ln x\cdot\frac{1}{x} = x^{y-1}\left(y(\ln x)^2 + 2\ln x\right).$$

Položme $P^0 = (1,\,1)$. Pak

$$f(P^0) = 1,\ f'_x(P^0) = 1,\ f'_y(P^0) = 0.$$

Totální diferenciál má pak tvar

$$df(P^0) = 1\cdot\Delta x + 0\cdot\Delta y = \Delta x = x - x^0 = x - 1.$$

Dále

$$f''_{x^2}(P^0) = 0,\ \ f''_{xy}(P^0) = 1,\ \ f''_{y^2}(P^0) = 0.$$

Tedy

$$d^2f(P^0) = f''_{x^2}(P^0)(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(P^0)\Delta x\Delta y + f''_{y^2}(P^0)(\Delta y)^2 = \\ = 2\Delta x\Delta y = 2(x-1)(y-1).$$

Zbytek lze zapsat ve tvaru

$$R_3 = \frac{1}{6}\left[\tilde{y}(\tilde{y}-1)(\tilde{y}-2)\tilde{x}^{\tilde{y}-3}\cdot(\Delta x)^3 + \right. \\ + 3\tilde{x}^{\tilde{y}-2}\left((\tilde{y}-1)(1 + \tilde{y}\ln\tilde{x}) + \tilde{y}\right)\cdot(\Delta x)^2\Delta y + \\ + 3\tilde{x}^{\tilde{y}-1}\left(\tilde{y}(\ln\tilde{x})^2 + 2\ln\tilde{x}\right)\cdot\Delta x(\Delta y)^2 + \\ \left. + \tilde{x}^{\tilde{y}}(\ln\tilde{x})^3\cdot(\Delta y)^3\right],$$

kde $\Delta x = x - 1,\ \Delta y = y - 1$ *a*

$$\tilde{x} = 1 + \theta(x-1),\ \tilde{y} = 1 + \theta(y-1).$$

Tedy Taylorův rozvoj funkce je dán takto:

$$x^y = 1 + (x-1) + \frac{1}{2}2(x-1)(y-1) + R_3 = x + (x-1)(y-1) + R_3.$$

Dosaďme konkrétní numerické hodnoty. Jestliže například $x = 1,04$ *a* $y = 1,03$*, tj.* $\Delta x = 0,04$ *a* $\Delta y = 0,03$*, pak*

$$1,04^{1,03} = 1,04 + 0,0012 + R_3 = 1,0412 + R_3.$$

Protože $0 < \tilde{x} < 1,04$ *a* $0 < \tilde{y} < 1,03$*, dostáváme pro zbytek* R_3 *odhad*

$$\begin{aligned}|R_3| < \frac{1}{6}\big[&1,03 \cdot 0,03 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0,04^3 + \\ &+ 3 \cdot 1 \cdot (0,3 \cdot (1 + 1,03) + 1,03) \cdot 0,04^2 \cdot 0,03 + \\ &+ 3 \cdot 1 \cdot (1,03 + 2) \cdot 0,04 \cdot 0,03^2 + \\ &+ 4 \cdot 2 \cdot 0,03^3\big] < \underline{\underline{0,00017}}.\end{aligned}$$

Přesněji: $1,04^{1,03} \approx 1,041224406$.

17. Implicitní funkce

Připomeňme, že implicitní funkce jedné proměnné je určena rovnicí

$$F(x,y) = 0. \tag{8.0.2}$$

Existují případy, kdy tato rovnice neurčuje funkci: například rovnice

$$x^2 + y^2 + 5 = 0$$

nemá žádné reálné kořeny a tedy y nemůže být považováno za funkci x. Podáme podmínky zaručující, že jedna z neznámých obsažených v rovnici (8.0.2) je určena jako funkce druhé.

Věta 8.0.9 *Nechť* $F(x,y)$ *je funkce spojitá i se svými parciálními derivacemi v okolí bodu* $M_0(x_0, y_0)$*. Jestliže*

$$F(x_0, y_0) = 0 \qquad \text{a} \qquad F'_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

pak pro hodnoty x *ležící dostatečně blízko* x_0 *má rovnice* (8.0.2) *jednoznačné řešení* $y = \varphi(x)$ *závislé spojitě na* x *takové, že* $\varphi(x_0) = y_0$*. Kromě toho má funkce* $\varphi(x)$ *také spojitou derivaci danou vztahem*

$$y'(x) \equiv \varphi'(x) = -\frac{F'_x(x, \varphi(x))}{F'_y(x, \varphi(x))}\ .$$

Příklad 95 *Nechť*

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - R^2.$$

Rovnice $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ *určuje kružnici. V libovolném bodě* $M_0(x_0, y_0)$ *této kružnice takovém, že* $y_0 \neq 0$, *jsou všechny podmínky věty splněny:*

$$x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0, \qquad F'_y(x_0, y_0) = 2y_0 \neq 0.$$

Příklad 96 *Nechť je implicitní funkce určena rovnicí*

$$F(x,y) = x^3 y + \ln y - x = 0.$$

V bodě $M_0(1,1)$ *máme* $F(1,1) = 0$. *Parciální derivace*

$$F'_x(x,y) = 3x^2y - 1, \qquad F'_y(x,y) = x^3 + \frac{1}{y}$$

jsou spojité v okolí tohoto bodu a

$$F'_y(1,1) = 2 \neq 0.$$

Tedy je jednoznačně určena funkce $y = \varphi(x)$ *vyhovující dané rovnici taková, že* $\varphi(1) = 1$. *Ačkoli jsme ukázali existenci funkce* $\varphi(x)$, *nelze ji vyjádřit jako elementární funkci* x, *protože rovnice není algebraicky řešitelná pro* y. *Lze nalézt některé přibližné hodnoty funkce* $\varphi(x)$, *dosadíme-li za* x *a aplikujeme-li nějakou numerickou metodu. Pro derivace dostáváme*

$$\varphi'(x) = -\frac{3x^2\varphi(x) - 1}{x^3 + \frac{1}{\varphi(x)}}$$

a

$$\varphi'(1) = -\frac{3-1}{2} = -1.$$

18. Výpočet derivace vyšších řádů pro implicitní funkce

Jestliže rovnice $F(x,y) = 0$ generuje implicitní funkci $y = \varphi(x)$, pak

$$F(x, \varphi(x)) = 0 \qquad \textit{nebo} \qquad F(x, \varphi(x)) \equiv 0$$

na odpovídajícím definičním intervalu funkce $y = \varphi(x)$. Derivováním tohoto vztahu získáváme

$$F'_x(x, \varphi(x)) + F'_y(x, \varphi(x))\varphi'(x) = 0$$

a dostáváme předchozí vzorec

$$\varphi'(x) = -\frac{F'_x(x, \varphi(x))}{F'_y(x, \varphi(x))}\ .$$

Derivováním tohoto vzorce dostáváme

$$\varphi''(x) = \frac{-1}{(F'_y(x, \varphi(x)))^2} \left[\left(F''_{xx}(x, \varphi(x)) + F''_{xy}(x, \varphi(x))\varphi'(x) \right) F'_y(x, \varphi(x)) + \right.$$
$$\left. + \, F'_x(x, \varphi(x)) \left((F''_{yx}(x, \varphi(x)) + F''_{yy}(x, \varphi(x))\varphi'(x) \right) \right]$$

nebo

$$\varphi''(x) = \frac{-1}{(F'_y(x,\varphi(x)))^3}\left[F''_{xx}(x,\varphi(x))(F'_y(x,\varphi(x)))^2 - \right.$$
$$\left. - 2F''_{xy}(x,\varphi(x))F'_x(x,\varphi(x)))F'_y(x,\varphi(x)) + F''_{yy}(x,\varphi(x))(F'_x(x,\varphi(x)))^2\right].$$

19. Další případy pro výpočet derivací

a) Jestliže rovnice

$$F(x,y,z) = 0$$

definuje $z = \varphi(x,y)$, pak

$$\varphi'_x(x,y) = -\frac{F'_x(x,y,\varphi(x,y))}{F'_z(x,y,\varphi(x,y))}, \qquad \varphi'_y(x,y) = -\frac{F'_y(x,y,\varphi(x,y))}{F'_z(x,y,\varphi(x,y))}.$$

b) Předpokládejme, že soustava

$$F_1(x,y_1,y_2) = 0,$$

$$F_2(x,y_1,y_2) = 0$$

generuje funkce $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, kde $x \in I \subset \mathbb{R}$, tedy

$$F_1(x,\varphi_1(x),\varphi_2(x)) \equiv 0,$$

$$F_2(x,\varphi_1(x),\varphi_2(x)) \equiv 0$$

na I. Pak derivováním těchto vztahů dostáváme

$$F'_{1x}(x,\varphi_1(x),\varphi_2(x)) +$$
$$+ F'_{1y_1}(x,\varphi_1(x),\varphi_2(x))\varphi'_1(x) + F'_{1y_2}(x,\varphi_1(x),\varphi_2(x))\varphi'_2(x) \equiv 0,$$

$$F'_{2x}(x,\varphi_1(x),\varphi_2(x)) +$$
$$+ F'_{2y_1}(x,\varphi_1(x),\varphi_2(x))\varphi'_1(x) + F'_{2y_2}(x,\varphi_1(x),\varphi_2(x))\varphi'_2(x) \equiv 0.$$

Jestliže je determinant

$$J = \begin{vmatrix} F'_{1y_1}(\dots) & F'_{1y_2}(\dots) \\ F'_{2y_1}(\dots) & F'_{2y_2}(\dots) \end{vmatrix} \neq 0,$$

pak řešením této soustavy dostáváme

$$y'_1(x) = \varphi'_1(x) = \frac{1}{J}\begin{vmatrix} -F'_{1x}(\dots) & F'_{1y_2}(\dots) \\ -F'_{2x}(\dots) & F'_{2y_2}(\dots) \end{vmatrix},$$

$$y'_2(x) = \varphi'_2(x) = \frac{1}{J}\begin{vmatrix} F'_{1y_1}(\dots) & -F'_{1x}(\dots) \\ F'_{2y_1}(\dots) & -F'_{2x}(\dots) \end{vmatrix}.$$

20. Extrémy funkcí více proměnných

Definice 104 *Bod $P^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ se nazývá bodem* **lokálního maxima (lokálního minima)** *funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, jestliže pro každý bod $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ v okolí bodu P platí:*

$$f(P) - f(P^0) < 0 \qquad (> 0\,).$$

Hodnota $f(P^0)$ se nazývá **extrém.**

Věta 8.0.10 (**Nutná podmínka pro existenci extrému.**) *Jestliže diferencovatelná funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nabývá v bodě P^0 svého extrému, její parciální derivace v tomto bodě jsou rovny nule:*

$$f'_{x_1}(P^0) = f'_{x_2}(P^0) = \dots = f'_{x_n}(P^0) = 0. \tag{8.0.3}$$

Všimněte si, že pokud diferencovatelná funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nabývá extrému v bodě P^0, pak

$$df(P^0) = 0.$$

Bodu P^0, v němž platí (8.0.3), se nazývá **stacionární bod** funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Příklad 97 *Určíme stacionární body funkce*

$$z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2.$$

V tomto případě nabývá systém rovnic (8.0.3) tvaru

$$\begin{array}{rcll} z'_x &=& 6x^2 + y^2 + 10x &=& 0, \\ z'_y &=& 2xy + 2y &=& 0. \end{array}$$

Ze druhé rovnice vyplývá, že buď $y = 0$ nebo $x = -1$. Dosadíme tyto hodnoty do první rovnice a určíme čtyři stacionární body*:*

$$M_1(0,0),\ M_2(-5/3,0),\ M_3(-1,2),\ M_4(-1,-2).$$

Abychom zjistili, které z těchto bodů jsou lokálními extrémy, musíme aplikovat dostatečné podmínky pro extrémy.

21. Dostatečné podmínky pro extrémy funkcí více proměnných

Nechť $P^0(x_0, y_0)$ je stacionární bod funkce $z = f(x,y)$. Označme

$$A = z''_{xx}(P^0), \quad B = z''_{xy}(P^0), \quad C = z''_{yy}(P^0).$$

Věta 8.0.11

1) *Jestliže $AC - B^2 > 0$, funkce $f(x,y)$ má extrém v bodě P^0, a to maximum pro $A < 0$ a minimum pro $A > 0$.*

2) *Jestliže* $AC - B^2 < 0$, *nemá funkce v bodě* P^0 *extrém.*

3) *Jestliže* $AC - B^2 = 0$, *vlastnosti druhé derivace neposkytují odpověď na otázku o existenci extrému a je nutné další vyšetřování.*

Příklad 98 *Pokračujme v předchozím příkladě 97. Druhé derivace jsou*

$$z''_{xx} = 12x + 10, \quad z''_{xy} = 2y, \quad z''_{yy} = 2x + 2.$$

Pro první bod M_1 *máme*

$$A = 10,\ B = 0,\ C = 2,\ AC - B^2 = 20 > 0,\ A > 0,$$

a tedy bod M_1 *je bodem lokálního minima. Pro bod* M_2 *máme*

$$A = -10,\ B = 0,\ C = -\frac{4}{3},\ AC - B^2 > 0,\ A < 0$$

a tedy bod M_2 *je bodem lokálního maxima. Pro bod* M_3 *máme*

$$A = -2,\ B = 4,\ C = 0,\ AC - B^2 < 0$$

a tedy bod M_3 *není bodem lokálního extrému. Konečně pro bod* M_4 *máme*

$$A = -2,\ B = -4,\ C = 0,\ AC - B^2 < 0.$$

Tedy ani bod M_4 *není bodem lokálního extrému.*

22. Dostatečné podmínky pro obecný případ

Nechť bod $P^0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ je stacionárním bodem funkce

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Věta 8.0.12
Jestliže $d^2 f(P^0) > 0$ (< 0), *funkce* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *má* lokální minimum (lokální maximum) *v bodě* P^0.
Jestliže $d^2 f(P^0) = 0$, *potom není možné rozhodnout o extrému v* P^0 *podle druhé derivace a otázka zůstává otevřená.*

Označme

$$a_{ij} = f''_{x_i x_j}(P^0).$$

Uvažujme posloupnost determinantů

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n,$$

kde

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Věta 8.0.13 (Sylvestrovo kritérium). *Jestliže*

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0,$$

pak $d^2 f(P^0) > 0$. *Jestliže*

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \ldots, (-1)^n \Delta_n > 0,$$

pak $d^2 f(P^0) < 0$.

23. Určení maximální a minimální hodnoty funkce na uzavřené oblasti

Máme za úkol určit nejvyšší a nejnižší hodnotu funkce $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ na *uzavřené oblasti* D. Jestliže funkce dosahuje jedné (nebo obou) těchto hodnot uvnitř oblasti, musí se pochopitelně jednat o lokální extrém. Může se však ukázat, že funkce nabývá nejvyšší nebo nejnižší hodnoty (nebo obou) v bodě na hranici dané oblasti.

Abychom našli globální maximum (minimum) spojité funkce $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ na omezeném uzavřeném intervalu, je nutné určit všechna *lokální maxima* (*lokální minima*), kterých funkce dosahuje uvnitř dané oblasti a také nejvyšší (nejnižší) hodnoty, jichž dosahuje na hranici oblasti. Potom největší (nejmenší) z těchto čísel je hledané globální maximum (minimum) dané funkce.

Příklad 99 *Určeme globální extrémy funkce* $z = x^2 - y^2$ *na oblasti* $D : x^2 + y^2 \leq 1$.

Zkoumejme funkci f *z hlediska existence extrému. Položíme-li parciaální derivace rovny nule, dostáváme rovnice*

$$\begin{array}{rcrcl} z'_x & = & 2x & = & 0 \\ z'_y & = & -2y & = & 0 \end{array}$$

a řešením tohoto systému je stacionární bod $x = y = 0$, *který patří do oblasti* D. *Najdeme* $A = 2, B = 0, C = -2$ *a* $AC - B^2 < 0$ *a bod* $(0, 0)$ *není bodem extrému. Toto si lze geometricky představit, všimneme-li si, že rovnice* $z = x^2 - y^2$ *je rovnicí hyperboloického paraboloidu.*

Globální extrémy dosahuje funkce z na hranici oblasti D. Protože hranice oblasti D lze vyjádřit pomocí rovnice

$$y^2 = 1 - x^2, \ \ x \in [-1, 1],$$

máme

$$z|_D = x^2 - (1 - x^2) = 2x^2 - 1.$$

Zkoumejme funkci $z = 2x^2 - 1$ z hlediska extrému, je-li $x \in [-1, 1]$. Dostáváme

$$z' = 4x = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow y = \pm 1, z'' = 4 > 0.$$

Minimálních hodnot nabývá funkce v bodech

$$M_1(0, 1), \ M_2(0, -1),$$

a to
$$z(M_1) = z(M_2) = -1.$$
Maximálních hodnot nabývá funkce v koncových bodech intervalu $[-1, 1]$, tj. v bodech
$$M_3(-1, 0),\ M_4(1, 0),$$
a to
$$z(M_3) = z(M_4) = 1.$$
Extrémy funkce $z = x^2 - y^2$ na oblasti D jsou $z = 1$ (maxima) v bodech M_3, M_4 a $z = -1$ (minima) v bodech M_1, M_2.

24. Vázané extrémy

Začneme formulací jednoho problému, který bude sloužit jako ilustrace pro hledání vázané extrému.

Příklad 100 *Mezi všemi pravoúhlými rovnoběžnostěny s danou celkovou plochou S máme najít takový, který má největší objem.*
Nechť jsou strany rovnoběžnostěnu označeny x, y a z. Problém se redukuje na hledání největší hodnoty funkce
$$V = xyz$$
za podmínky, že
$$xy + yz + zx = \frac{S}{2}\ .$$
Výpočet dokončíme po krátkém teoretickém výkladu.

V nejobecnějším případě je problém dán následovně: Je dána funkce
$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n);$$
úkolem je nalézt extrémy za podmínky, že proměnné vyhovují m $(m < n)$ podmínkám:
$$\begin{aligned}
\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0,\\
\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0,\\
\ldots&\\
\varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0.
\end{aligned}$$
Následující pomocná funkce n proměnných zahrnuje m dalších neznámých parametrů (**Lagrangeových multiplikátorů**):
$$\Phi = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \cdots + \lambda_m\varphi_m.$$
Vyřešíme rovnice pro body nevázanaých (nepodmíněných) extrémů pro tuto pomocnou funkci:
$$\Phi'_{x_1} = 0, \Phi'_{x_2} = 0, \ldots, \Phi'_{x_n} = 0, \Phi'_{\lambda_1} = 0, \Phi'_{\lambda_2} = 0, \ldots, \Phi'_{\lambda_m} = 0.$$

Dostáváme body, v nichž múže funkce nabývat vázaných extrémů. Tato soustava rovnic poskytuje nutné podmínky, tedy ne každý bod vyhovující této soustavě musí být bodem vázaného extrému. Nebudeme mluvit o dostatečných podmínkách pro body vázaného extrému. V konkrétním případě je většinou možné zjistit, zda je bod určený výše uvedenými rovnicemi bodem extrému bez toho, že bychom zkoumali, jsou-li splněny dostatečné podmínky. Popisovaná metoda je známá jako metoda **Lagrangeových multiplikátorů.**

Příklad 101 *Pokračujme v řešení započatého příkladu. Pomocnou funkci lze vyjádřit jako*

$$\Phi(x, y, z) = xyz + \lambda(xy + yz + zx - S/2).$$

Rovnice určující body extrému jsou tvaru

$$\begin{array}{lcccccc} \Phi'_x = 0 & \Longrightarrow & yz & + & \lambda(y+z) & = & 0, \\ \Phi'_y = 0 & \Longrightarrow & xz & + & \lambda(x+z) & = & 0, \\ \Phi'_z = 0 & \Longrightarrow & xy & + & \lambda(y+x) & = & 0, \\ \Phi'_\lambda = 0 & \Longrightarrow & xy & + & yz + zx - S/2 & = & 0. \end{array}$$

Odečteme-li rovnice od sebe navzájem, dostáváme

$$\begin{array}{rcl} (z+\lambda)(y-x) & = & 0, \\ (x+\lambda)(z-y) & = & 0, \\ (y+\lambda)(z-x) & = & 0. \end{array}$$

Odtud vyplývá, že $x = y = z$, tedy hledaný rovnoběžnostěn je krychle. Rozměry této krychle zjistíme pomocí podmínek

$$x = y = z = \sqrt{S/6} \quad \text{a} \quad V = \sqrt{\frac{S\sqrt{S}}{6\sqrt{6}}} \ .$$

Kapitola 9

Integrální počet funkcí jedné proměnné - Neurčitý integrál

V následujících kapitolách $9-11$ se budeme zabývat tzv. integrálním počtem funkcí, které závisí jen na jedné proměnné.

9.1 Primitivní funkce (antiderivace) a neurčitý integrál

Definice 105 *Primitivní funkce (antiderivace) dané funkce $f(x)$ na daném intervalu je libovolná diferencovatelná funkce $F(x)$, jejíž derivací je daná funkce, tedy platí:*

$$F'(x) = f(x).$$

Věta 9.1.1 *Jestliže $F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$, pak $F(x) + C$, kde $C \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta, je k této funkci také primitivní.*

Definice 106 *Soubor všech primitivních funkcí dané funkce $f(x)$ se nazývá* **neurčitý integrál** *$f(x)$ a označuje se symbolem*

$$\int f(x)dx,$$

tedy

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Poznámka 25 *Dá se dokázat, že neurčitý integrál funkce, která je na daném intervalu spojitá nebo zde má konečný počet nespojitostí prvního druhu, na tomto intervalu existuje.*

9.2 Základní tabulka integrálů

Uveďme nyní některé základní integrály. Poznamenejme, že touto tabulkou nejsou zdaleka vyčerpány všechny funkce, ke kterým umíme primitivní funkce najít. Existují celé knihy obsahující tabulky integrálů a programy výrazně ulehčující hledání primitivních funkcí.

$$\int 0dx = C, \tag{9.2.1}$$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1, \tag{9.2.2}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \tag{9.2.3}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \tag{9.2.4}$$

$$\int e^x dx = e^x + C, \tag{9.2.5}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \tag{9.2.6}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \tag{9.2.7}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \tag{9.2.8}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C, \tag{9.2.9}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C, \end{cases} \tag{9.2.10}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arccotg} x + C, \end{cases} \tag{9.2.11}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}} dx = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C, \tag{9.2.12}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \operatorname{arcsinh} x + C, \tag{9.2.13}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arccosh} x + C, \tag{9.2.14}$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C, \\ \operatorname{arctgh} x + C, \ |x| < 1 \\ \operatorname{arccotgh} x + C, \ |x| > 1, \end{cases} \tag{9.2.15}$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C, \tag{9.2.16}$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C, \tag{9.2.17}$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \operatorname{tgh} x + C, \tag{9.2.18}$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x}\,dx = -\operatorname{cotgh} x + C. \tag{9.2.19}$$

9.3 Některé vlastnosti integrálů

Platnost několika následujících vztahů lze prověřit přímo užitím definic derivace a neurčitého integrálu. Tyto vztahy jsou při výpočtech často používány.

$$\int df(x) = f(x) + C, \tag{9.3.1}$$

$$d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx, \tag{9.3.2}$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx, \tag{9.3.3}$$

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \tag{9.3.4}$$

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x) \tag{9.3.5}$$

Poznámka 26 *Ne ke každé dané funkci umíme najít neurčitý integrál jako nějakou konkrétní funkci a to přesto, že dle Poznámky 25 tento integrál existuje. Například neumíme vyjádřit pomocí tzv. elementárních funkcí integrály* $\int e^{\pm x^2}dx$, $\int \sin x^2 dx$.

Kapitola 10

Integrální počet funkcí jedné proměnné - dvě základní integrační metody a často užívané integrační postupy

V této kapitole uvádíme dvě základní metody integrace (substituční a po částech), které tvoří základ integračních technik. Dále je osvětlen způsob integrace podílu dvou mnohočlenů. V závěru kapitoly jsou uvedena doporučení, jak postupovat při integraci některých iracionálních a trigonometrických funkcí.

10.1 Substituční integrační metoda

Tato metoda je velmi flexibilní a její myšlenka je obsažena v následující větě:

Věta 10.1.1 *Jestliže*

$$\int f(u)du = F(u) + C \tag{10.1.1}$$

a $u = \varphi(x) \in C^1$, *pak*

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = F[\varphi(x)] + C. \tag{10.1.2}$$

Základem úspěchu při alpikacích věty 10.1.1 je správný výběr funkce $\varphi(x)$. Praxe je totiž taková, že výpočet konkrétních příkladů je schematicky veden od vzorce (10.1.2) ke vzorci (10.1.1).

Příklad 102

$$\int e^{x^2} x\,dx = \left[\begin{array}{c} u = x^2 \\ du = 2xdx \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

Jednoduchou aplikací věty 10.1.1 lze odvodit následující větu:

Věta 10.1.2 *Jestliže* $\varphi(x) = ax + b$, *kde* $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, *pak*

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Příklad 103 *Následující dva vztahy lze lehce dokázat:*

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \ln|\varphi(x)| + C, \quad \textit{stačí volit } f(u) = \frac{1}{u} \ \textit{ ve větě 10.1.1.}$$

$$\int \varphi'(x)\varphi^{\alpha}(x)\,dx = \frac{\varphi^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C, \ \alpha \neq -1, \quad \textit{volíme } \ f(u) = x^{\alpha}$$

10.2 Integrace po částech (per partes)

Ze vztahů pro nalezení diferenciálů $d(uv) = u\,dv + v\,du$ a $u\,dv = d(uv) - v\,du$ vyplývá *vzorec pro metodu integrace per partes:*

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{10.2.1}$$

Užití tohoto vztahu je také velmi flexibilní a vyžaduje jistou zkušenost pro výběr funkcí u a v. Ne každý jejich výběr vede ke zjednodušení výpočtu. Tím máme na mysli dosažení stavu, kdy integrál na pravé straně $\int v\,du$ lze snadno nalézt. Někdy je nutné metodu užít několikanásobně, abychom původní funkci zintegrovali.

Příklad 104 *Vypočtěme integrál*

$$\int x\mathrm{e}^x\,dx$$

metodou per partes.
Řešení. *Položme* $u = x$ *a* $v = e^x$. *Potom*

$$\int x\mathrm{e}^x\,dx = \left[\begin{array}{c} u = x, du = dx \\ dv = \mathrm{e}^x dx, v = \mathrm{e}^x \end{array}\right] = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,dx = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C.$$

10.3 Integrace podílu dvou mnohočlenů (racionálních lomených funkcí)

Každá racionální lomená funkce je tvaru

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

kde $P_m(x)$ a $Q_n(x)$ jsou polynomy. Stupeň čitatele je m, stupeň jmenovatele je n. Předpokládejme, že $m < n$. V případě, že $m \geq n$, podíl $P_m(x)$ a $Q_n(x)$ dává

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = N(x) + \frac{\tilde{P}_i(x)}{Q_n(x)},$$

kde $N(x)$ je nějaký polynom stupně $m-n$, $\tilde{P}_i(x)$ je polynom stupně $i < n$. Předpokládáme, že polynomy mají reálné koeficienty a že koeficient u x^n v $Q_n(x)$ je roven 1. Polynom $Q(x)$ lze zapsat ve tvaru

$$Q(x) = (x-\alpha)^k \dots (x^2+px+q)^t \dots,$$

kde α je k-násobný reálný kořen rovnice $Q(x) = 0$ a kvadratická rovnice $x^2+px+q = 0$ má komplexně sdružené reálné kořeny (tj. $p^2 - 4q < 0$), tedy polynom $Q(x)$ má t-násobné komplexně sdružené kořeny.

V rozkladu podílu $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ na parciální zlomky odpovídá každému faktoru $(x-\alpha)^k$ součet k parciálních zlomků tvaru

$$\frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}} + \dots + \frac{A_1}{(x-\alpha)}$$

a každému faktoru $(x^2+px+q)^t$ odpovídá součet t parciálních zlomků tvaru

$$\frac{B_t x + C_t}{(x^2+px+q)^t} + \frac{B_{t-1}x + C_{t-1}}{(x^2+px+q)^{t-1}} + \dots + \frac{B_1 x + C_1}{(x^2+px+q)} \quad .$$

Rozklad má tedy tvar

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}} + \dots + \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \dots + \\ + \frac{B_t x + C_t}{(x^2+px+q)^t} + \frac{B_{t-1}x + C_{t-1}}{(x^2+px+q)^{t-1}} + \dots + \frac{B_1 x + C_1}{(x^2+px+q)},$$

kde všechny koeficienty jsou reálná čísla.

Proto stačí uvažovat pouze čtyři typy parciálních zlomků:

I. Parciální zlomek tvaru:

$$Z_1(x) = \frac{A}{x-a}, \text{kde } A \neq 0.$$

Integrace tohoto zlomku je jednoduchá. Ihned dostáváme:

$$\int Z_1(x)\,dx = A \ln|x-a| + C.$$

II. Parciální zlomek tvaru:

$$Z_2(x) = \frac{A}{(x-a)^n} \text{ ,kde } A \neq 0 \text{ a } n > 1.$$

Integrace:

$$\int Z_2(x)\,dx = \left[\begin{array}{c} t = x-a, \\ dt = dx \end{array} \right] = A \int \frac{1}{t^n}\,dt = = \frac{At^{1-n}}{1-n} + C = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C.$$

III. Parciální zlomek tvaru:

$$Z_3(x) = \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\ \text{, kde } M \neq 0\ , p^2-4q<0.$$

Postup integrace je následující:

$$\int Z_3(x)\,dx = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p)+N-\frac{Mp}{2}}{x^2+px+q}\,dx = \left[A = N - \frac{Mp}{2}\right] =$$
$$= \frac{M}{2}\int \frac{(x^2+px+q)'}{(x^2+px+q)}\,dx + A\int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}\,dx =$$
$$= \left[B = q-\frac{p^2}{4}\right] = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{A}{B}\int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{B}}\right)^2+1}\,dx.$$

V posledním integrálu zavedeme substituci

$$t = \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{B}}$$

a tedy

$$\frac{A}{B}\int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{B}}\right)^2+1}\,dx = \frac{A}{B}\sqrt{B}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt =$$
$$= \frac{A}{\sqrt{B}}\operatorname{arctg} t + C = \frac{A}{\sqrt{B}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{B}} + C.$$

IV. Parciální zlomek tvaru:

$$Z_4(x) = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\ , M \neq 0,\ \ p^2-4q<0,\ \ n>1.$$

Pro integrování tohoto zlomku se používá tzv. *rekurentní formule*, jejíž platnost lze ověřit přímým derivovaním:

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx = \frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx.$$

Tedy

$$\int Z_4(x)\,dx = \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p)}{(x^2+px+q)^n}\,dx + \int \frac{N-\frac{Mp}{2}}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{2}\right]^n}\,dx.$$

První integrál vypočteme jako integrál typu

$$\frac{M}{2}\int \frac{f'(x)}{f^n(x)}\,dx,$$

kde $f(x) = x^2+px+q$. Druhý integrál, ve kterém je $q-\frac{p^2}{2} > 0$, vypočteme postupně užitím rekurentní formule po substituci $x+\frac{p}{2} = t$. Nakonec po $(n-1)-$násobném použití přecházíme k integraci zlomku typu $Z_3(x)$.

10.4 Integrace některých iracionálních funkcí

Zde uvedeme seznam některých užitečných doporučení pro výpočet integrálů některých iracionálních funkcí. Racionální funkci označujeme $R(\cdot)$ a definujeme ji jako funkci, kterou obdržíme z jejích argumentů operacemi sčítání, odečítání, násobení a dělení.

A) V případě integrálů tvaru

$$\int R(x, x^{\frac{1}{k_1}}, x^{\frac{1}{k_2}}, \dots, x^{\frac{1}{k_n}})\, dx,$$

kde $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ je vhodné zavést substituci $x = t^\alpha$, kde α je nejnižší společný násobek celých čísel $k_1, k_2, \dots, k_n$. Tím integrál převedeme na některý z případů popsaných v části 10.3.

B) V případě integrálů tvaru

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_n}}\right) dx,$$

kde $k_1, k_2, \dots, k_2 \in \mathbb{N}$ je vhodné zavést substituci $t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, kde α je nejmenší společný násobek čísel $k_1, k_2, \dots, k_n$. Tím integrál opět převedeme na některý z případů popsaných v části 10.3.

C) Binomickým integrálem nazýváme integrál tvaru

$$\int x^m (ax^n + b)^p\, dx, \quad m, n, p \in \mathbb{Q}.$$

Doporučujeme postupovat následovně:

- Je-li $p \in \mathbb{Z}$, pak používáme stejná doporučení jako v **A)**.
- Je-li $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, pak pokládáme $ax^n + b = t^\alpha$, kde α je jmenovatel p. Dále používáme postup popsaný v **A)**.
- Je-li $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, pak pokládáme $a + \frac{b}{x^n} = t^\alpha$, kde α je jmenovatel p. Dále používáme postup popsaný v **A)**.

D)

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx, \quad a \neq 0.$$

Používáme tzv. *Eulerovy substituce:*

- Je-li $a > 0$, užíváme substituci

$$t = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm x\sqrt{a}\,.$$

- Je-li $c > 0$, užíváme substituci

$$t \cdot x = \sqrt{ax^2 + bx + c} \pm \sqrt{c}\,.$$

- Je-li $a < 0$, $b^2 - 4ac > 0$, pak

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = |x-\alpha|\sqrt{a\frac{x-\beta}{x-\alpha}}$$

  a užijeme substituci

$$t^2 = a \cdot \frac{x-\beta}{x-\alpha}\ .$$

E) Pro integrál typu

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

lze použít následující postup:

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}}}\,dx\ .$$

Tento integrál lze převést na některý z tabelovaných integrálů:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}\,dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

F) Pro integrály typu

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)\,dx$$

je vhodné užít následující substituce:

$$x = a\sin t, \quad x = a\cos t.$$

G) Pro integrály typu

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)\,dx$$

je vhodné užít následující substituce:

$$x = a\operatorname{tg} t,\ \ x = a\sinh t,\ \ x = \operatorname{cotg} t.$$

H) Pro integrály typu

$$\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)\,dx$$

je vhodné užít následující substituce:

$$x = \frac{a}{\cos t}\ ,\ \ x = a\sin t,\ \ x = \cosh t.$$

10.5 Integrace trigonometrických funkcí

Budeme se zabývat integrováním funkcí typu

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx \ ,$$

kde R je racionální funkcí uvedených argumentů. Uveďme několik doporučení, jak při integraci postupovat.

A) Lze užít tzv. *univerzální substituci:*

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \ .$$

Pak

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \ \ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

a

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \ .$$

Odtud plyne

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \ .$$

Analogicky vypočteme

$$\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \frac{2t}{1+t^2} \ .$$

Těmito substitucemi (dosazenými za dx, $\sin x$ a $\cos x$) převedeme výchozí integrál na integraci podílu dvou mnohočlenů.

B) Je-li funkce $R(\sin x, \cos x)$ lichá vzhledem ke $\cos x$, tj. je-li

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

je vhodné užít substituci

$$t = \sin x.$$

C) Je-li funkce $R(\sin x, \cos x)$ lichá vzhledem k $\sin x$, tj. je-li

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

je vhodné užít substituci

$$t = \cos x.$$

D) Je-li funkce $R(\sin x, \cos x)$ sudá vzhledem k funkcím $\sin x$ i $\cos x$, tj. je-li

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

je vhodné užít substituci

$$t = \operatorname{tg} x.$$

Pak

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \ ,$$

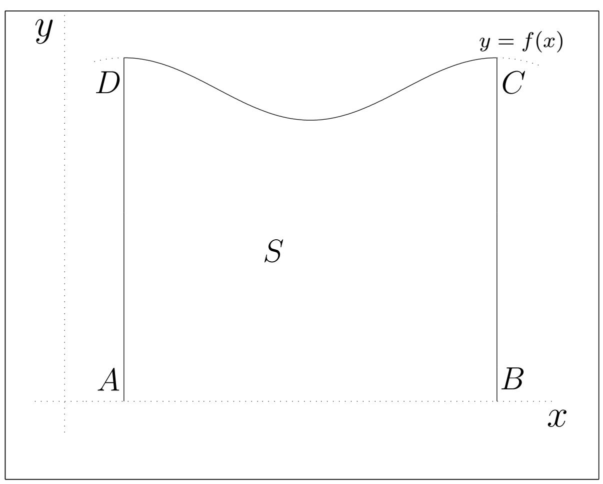
$$t = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x} \Longrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \ , \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \ .$$

Kapitola 11

Integrální počet funkcí jedné proměnné - určitý integrál a jeho aplikace

11.1 Výpočet plochy obrazce omezeného křivkou

Zabývejme se úlohou, jak vypočítat plochu P_S obrazce S na obrázku 11.1.1 ohraničeného



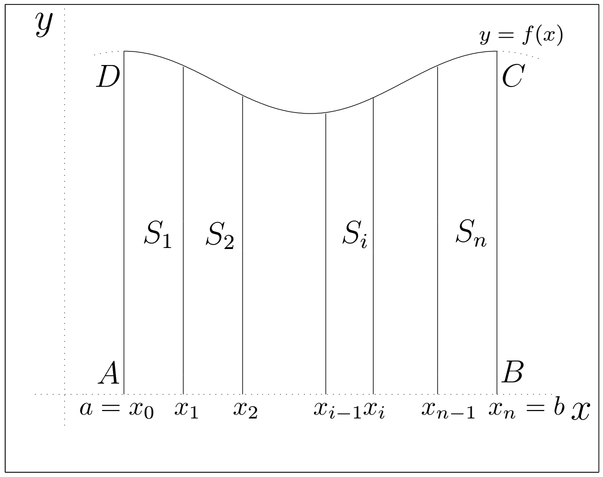
Obrázek 11.1.1: Určitý integrál - plocha obrazce 1

úsečkami spojujícími body AB, BC, AD a částí spojité křivky $y = f(x)$ spojující body C a D.
Rozdělme libovolně základnu obrazce S (tj. interval $[a, b]$ užitím libovolného konečného počtu dělících bodů) na n subintervalů

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n],$$

kde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Veďme přímky rovnoběžné s osou y

dělicími body intervalu $[a, b]$. Tím se daný obrazec S rozdělil na n obrazců S_1, S_2, $\dots S_n$, tj. $S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ (viz. obrázek 11.1.2).



Obrázek 11.1.2: Určitý integrál - plocha obrazce 2

V každém subintervalu vybereme libovolným způsobem bod. Označíme-li tyto body $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$, můžeme psát

$$x_0 \leq \xi_0 \leq x_1, \;\; x_1 \leq \xi_1 \leq x_2, \;\; \dots, \;\; x_{n-1} \leq \xi_{n-1} \leq x_n.$$

Pak platí, že plocha P_S je rovna součtu ploch P_{S_i} jednotlivých oblastí S_i , $i = 1, \dots, n$. Plochu P_{S_i} můžeme přibližně vyjádřit vztahem

$$P_{S_i} \approx f(\xi_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1}) = f(\xi_{i-1}) \cdot \Delta x_{i-1},$$

kde $\Delta x_{i-1} = x_i - x_{i-1}$. Proto

$$P_S = \sum_{i=0}^{n-1} P_{S_i} \approx f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Situace je načrtnuta na obrázku 11.1.3.

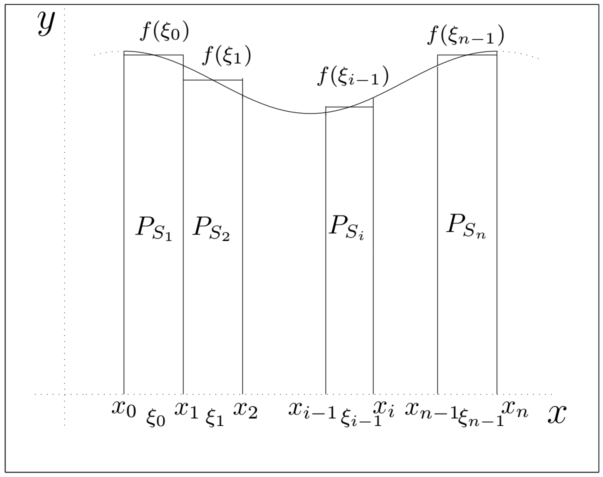
Pokud zvětšujeme do nekonečna počet dělících bodů a tzv. norma dělění

$$\Delta = \max\{\Delta x_0, \Delta x_1, \dots, \Delta x_{n-1}\}$$

přitom konverguje k nule, pak je plocha obrazce S určena vztahem

$$P_S = \lim_{n \to \infty, \Delta \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

(ve kterém předpokládáme, že limita existuje).



Obrázek 11.1.3: Určitý integrál - plocha obrazce 3

11.2 Určitý integrál

Definujeme pro danou funkci $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$ tzv. n-tý tintegrální součet:

$$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

kde veličiny ξ_i, x_i, aΔx_i mají stejný význam jako v předchozím odstavci a $x_0 = a$, $x_n = b$.

Definice 107 *Určitý integrál (tzv. Riemannův) na $[a, b]$ je limita integrálních součtů, když $n \to \infty$ a norma dělení Δ se přitom blíží nule (za předpokladu, že tato limita existuje).*

Určitý integrál označujeme:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty,\Delta\to 0} I_n.$$

Geometrický význam určitého integrálu je zřejmý z předcházející podkapitoly 11.1

Věta 11.2.1 (O existenci určitého integrálu) *: Je-li funkce $f(x)$ spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$, pak $\int_a^b f(x)dx$ existuje.*

Definice 108 *Existuje-li $\int_a^b f(x)dx$, pak funkci $f(x)$ nazýváme integrovatelnou funkcí.*

11.3 Vlastnosti určitého integrálu

Z definice určitého integrálu lze odvodit řadu jeho vlastností. Platí například (všechny použité funkce budeme považovat za integrovatelné):

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \tag{11.3.1}$$

$$\int_a^b dx = b - a, \tag{11.3.2}$$

$$\int_a^b 0\,dx = 0, \tag{11.3.3}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx, \tag{11.3.4}$$

je-li $c \in [a, b]$, pak

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{11.3.5}$$

(interval integrace $[a, b]$ lze rozdělit na dvě části),

$$\forall k \in \mathbb{R}: \quad \int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \tag{11.3.6}$$

(konstantu lze vytknout před integrál),
je-li $f(x) \leq g(x)$ na $[a, b]$, pak

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx, \tag{11.3.7}$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx, \quad a < b, \tag{11.3.8}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt, \tag{11.3.9}$$

$$\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx, \tag{11.3.10}$$

je-li $S(x)$ funkce sudá a $L(x)$ funkce lichá, pak

$$\text{a)} \int_{-a}^a S(x)\,dx = 2\int_0^a S(x)\,dx; \quad \text{b)} \int_{-a}^a L(x)\,dx = 0. \tag{11.3.11}$$

11.4 Odhad určitého integrálu. Věta o střední hodnotě.

Věta 11.4.1 *Je-li na $[a,b]$ funkce $f(x)$ integrovatelná a ohraničená zdola a zhora konstantami m, M, tj. $m \le f(x) \le M$ na $[a,b]$, pak*

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

nebo

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M.$$

Následující věta je často nazývána větou o střední hodnotě.

Věta 11.4.2 (Věta o střední hodnotě) *Je-li $f(x) \in C$ ne $[a,b]$, pak existuje bod $\xi \in [a,b]$ takový, že platí:*

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

11.5 Derivace integrálu vzhledem k horní mezi

Předpokládejme, že funkce $f(x)$ je spojitá. Definujeme novou funkci

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

jako určitý integrál s proměnnou horní mezí. (Diskuse o označení: Je-li $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$, pak x probíhá hodnoty od a do x, což nedává smysl.) Snadno lze dokázat následující výsledek, který říká, že funkce $F(x)$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)$.

Věta 11.5.1 *Derivace integrálu vzhledem k horní mezi je rovna integrandu, tj.*

$$F'(x) = f(x).$$

Důsledek 30 *Ke každé spojité funkci $f(x)$ existuje primitivní funkce.*

11.6 Newton-Leibnizova věta (Základní vzorec integrálního počtu)

Věta 11.6.1 *Hodnota určitého integrálu je rovna rozdílu hodnot libovolné antiderivace $\Phi(x)$ integrandu odpovídajících horní a dolní mezi integrálu:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a),$$

kde $\Phi'(x) = f(x)$.

Příklad 105 *Protože pro $x > 0$ je $(lnx)' = \frac{1}{x}$, platí: $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln|x||_1^2 = \ln 2$.*

11.7 Integrace per partes pro učité integrály

Ze vztahu pro integraci per partes pro neurčité integrály okamžitě vyplývá vztah

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x).$$

11.8 Metoda substituce pro určité integrály

Věta 11.8.1 *Je-li* $x = \varphi(t) \in C^1$ *na* $(\alpha, \beta), a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$ *a* $\varphi(t)$ *je monotónní, pak*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

Příklad 106

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \big[x = e^t,\ t \in [0,1]\big] = \int_0^1 \frac{t}{e^t}e^t\,dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

11.9 Numerické integrování

1. Úvod

V praxi zřídkakdy dokážeme najít přesnou hodnotu určitého integrálu. Například integrál

$$\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$$

nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí. V následujícím odstavci popíšeme některé metody pro přibližný numerický výpočet určitých integrálů. Zavedeme pojem *kvadratického vzorce.* Nechť je dán určitý integrál

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

funkce f, která je spojitá na intervalu $[a, b]$. Přibližná rovnost

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^n q_j \cdot f(x_j),$$

kde q_j jsou jistá čísla a x_j jsou určité body intervalu $[a, b]$ (které jsou voleny tak, aby bylo přibližné rovnosti docíleno), se nazývá *kvadratická formule* definovaná *váhami* q_j a *uzly* x_j.

2. Obdélníkové pravidlo

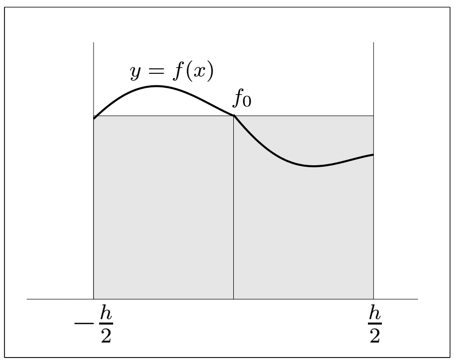
Předpokládejme, že $f \in C^2[-h/2, h/2]$, $h > 0$. Položíme přibližně

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(x)\,dx \approx h \cdot f_0, \tag{11.9.1}$$

kde $f_0 = f(0)$. Přibližný vztah 11.9.1 říká, že plochu křivostranného lichoběžníka ohraničeného shora grafem funkce f lze aproximovat plochou vepsaného obdélníka, jehož výška je rovna hodnotě funkce f v polovině základny lichoběžníka (viz. obrázek 11.9.1). Dále hledáme zbytek, tedy chybu formule (11.9.1). Lze dokázat tzv. *obdélníkové pravidlo se zbytkem:*

$$\int_{-h/2}^{h/2} f(x)\,dx = h \cdot f_0 + \frac{h^3}{24} \cdot f''(\xi)\ ,$$

kde o poloze bodu ξ lze říci pouze, že to je nějaký bod z intervalu $[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$, tj. $\xi \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$.



Obrázek 11.9.1: Obdélníkové pravidlo

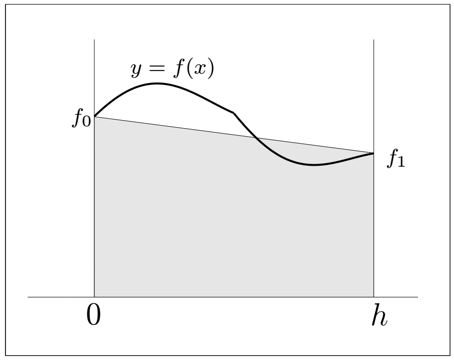
3. Lichoběžníkové pravidlo

Nechť $f \in C^2[0, h]$. Položíme

$$\int_0^h f(x)\,dx \approx h \cdot \frac{f_0 + f_1}{2}\,,$$

kde $f_0 = f(0)$ a $f_1 = f(h)$, tj. integrál je přibližně nahrazen plochou vepsaného lichoběžníka (viz. obrázek 11.9.2). Tzv. *lichoběžníkové pravidlo se zbytkem* má tvar

$$\int_0^h f(x)\,dx = h \cdot \frac{f_0 + f_1}{2} - \frac{h^3}{12} \cdot f''(\xi),\ \ \xi \in [0, h].$$



Obrázek 11.9.2: Lichoběžníkové pravidlo

4. Simpsonovo pravidlo (parabolické pravidlo)

Předpokládejme, že $f \in C^4[-h, h]$. Aproximujeme integrál

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx$$

plochou vepsaného křivostranného lichoběžníka ohraničeného shora parabolou procházející body $(-h, f_{-1})$, $(0, f_0)$, (h, f_1), kde $f_i = f(ih)$ (viz obrázek 11.9.3). Tato parabola má rovnici

$$y = f_0 + \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} \cdot x + \frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{2h^2} \cdot x^2,$$

což lze lehce ověřit, položíme-li x rovno $-h$, 0 a h. Tak snadno spočteme, že

$$\int_{-h}^{h} y(x)\,dx = \frac{h}{3} \cdot (f_{-1} + 4f_0 + f_1).$$

Tedy tzv. *Simpsonovo pravidlo*, které se také nazývá *parabolické pravidlo*, má tvar

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3} \cdot (f_{-1} + 4f_0 + f_1).$$

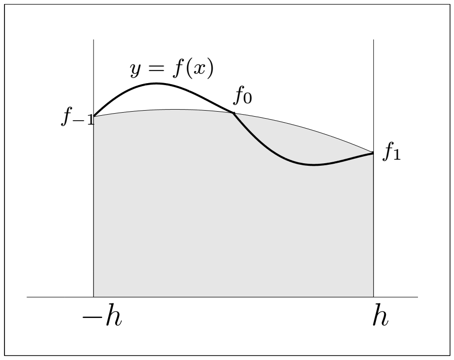
Lze dokázat tzv. *Simpsonovo pravidlo se zbytkem:*

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx = \frac{h}{3} \cdot (f_{-1} + 4f_0 + f_1) - \frac{h^5}{90} \cdot f^{(4)}(\xi),$$

kde $\xi \in [-h, h]$. Výše uvedené kvadratické vzorce se nazývají *kanonické.*

5. Složené kvadratické formule

Je-li v praxi třeba určit přibližnou hodnotu integrálu, je daný interval $[a, b]$ rozdělen na N shodných subintervalů. Na každý z nich aplikujeme kanonickou kvadratickou formuli a výsledky sečteme. Kvadratické formule zkonstruované takto na intervalu $[a, b]$ se nazývají



Obrázek 11.9.3: Simpsonovo pravidlo

složené. Aplikujeme-li obdélníkové a lichoběžníkové pravidlo, je pohodlné brát intervaly délky h, v případě Simpsonova pravidla délky $2h$.

Podívejme se podrobněji na použití obdélníkového pravidla. Nechť $f \in C^2$. Označíme intervaly $[x_i, x_{i+1}]$, kde $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, $x_N = b$, $h = (b-a)/N$. Ve shodě s obdélníkovým pravidlem

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx hf_{i+1/2}, \tag{11.9.2}$$

kde $f_{i+1/2} = f(a + (i+1/2)h)$ je hodnota f ve středu subintervalu $[x_i, x_{i+1}]$. Navíc

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = hf_{i+1/2} + \frac{h^3}{24} \cdot f''(\xi_i),$$

kde $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ je nějaký bod. Sečteme-li všechny aproximace (11.9.2) dostáváme *složené obdélníkové pravidlo:*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(f_{1/2} + f_{3/2} + \cdots + f_{N-1/2}\right).$$

Lze lehce dokázat tzv. *složené obdélníkové pravidlo se zbytkem:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left(f_{1/2} + f_{3/2} + \cdots + f_{N-1/2}\right) + h^2 \cdot \frac{b-a}{24} \cdot f''(\xi),$$

kde $\xi \in [a, b]$.
Za podmínky, že $f \in C^2[a, b]$, můžeme zapsat *složené lichoběžníkové pravidlo:*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{f_0}{2} + f_1 + \cdots + f_{N-1} + \frac{f_N}{2}\right)$$

a odpovídající *složené lichoběžníkové pravidlo se zbytkem:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left(\frac{f_0}{2} + f_1 + \cdots + f_{N-1} + \frac{f_N}{2}\right) - h^2 \cdot \frac{b-a}{12} \cdot f''(\xi),$$

kde $f_i = f(a+ih)$, $h = (b-a)/N$, a $\xi \in [a,b]$.

Nechť nyní $h = (b-a)/2N$ a $x_j = a + jh$, $f_j = f(x_j)$. Simpsonovo kanonické pravidlo můžeme přepsat ve spojení se subintervaly $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ délky $2h$:

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f_{2i} + 4f_{2i+1} + f_{2i+2}\right).$$

Sečtením obou stran vztahu přes i od 0 do $N-1$ dostáváme *složené Simpsonovo pravidlo:*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 4f_{2N-1} + f_{2N}\right).$$

Odpovídající *složené Simpsonovo pravidlo se zbytkem,* které získáme sečtením rovností v subintervalech $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ za podmínky, že $f \in C^4$, lze zapsat takto:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f_0 + f_{2N} + 4\sum_{i=1}^{N} f_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{N-1} f_{2i}\right) - h^4 \cdot \frac{b-a}{180} \cdot f^{(4)}(\xi),$$

kde $f_i = f(a+ih)$, $h = (b-a)/(2N)$, a $\xi \in [a,b]$.

6. Odhad chyb kvadratických formulí

Pro stručnost zavedeme označení

$$I_h^{\text{rect}} = h \cdot \sum_{i=0}^{N-1} f_{i+1/2},$$

je-li integrál přibližně počítán složeným obdélníkovým pravidlem,

$$I_h^{\text{trap}} = h \cdot \left(\frac{f_0 + f_N}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f_i\right),$$

kde $h = (b-a)/N$ a $f_\mu = f(a+\mu h)$, je-li integrál přibližně počítán složeným lichoběžníkovým pravidlem,a

$$I_h^{\text{Simp}} = \frac{h}{3} \cdot \left(f_0 + f_{2N} + 4\sum_{i=1}^{N} f_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{N-1} f_{2i}\right),$$

kde $h = (b-a)/(2N)$ a $f_i = f(a+ih)$, je-li integrál přibližně počítán složeným simpsonovým pravidlem.

Z vyjádření zbytků vidíme, že obdélníkové a lichoběžníkové pravidlo jsou přesné pro polynomy prvního stupně, zatímco Simpsonovo pravidlo je přesné pro polynomy třetího stupně. První dvě pravidla mají přesnost druhého řádu vzhledem k h, zatímco Simpsonovo pravidlo má přesnost čtvrtého řádu. Proto pro funkce třídy C^4 pro malá h dává

Simpsonovo pravidlo zpravidla vyšší přesnost než předešlé dvě metody.

Chyba složeného obdélníkového pravidla a složeného Simpsonova pravidla splňuje nerovnosti

$$|I - I_h^{\text{rect}}| \leq h^2 \cdot \frac{b-a}{24} \cdot \max_{[a,b]} |f''(x)|,$$

$$|I - I_h^{\text{Simp}}| \leq h^4 \cdot \frac{b-a}{180} \cdot \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Podobné nerovnosti existují pro lichoběžníkové pravidlo. Dolní odhady jsou také užitečné. Především dolní odhad pro složené obdélníkové pravidlo je

$$|I - I_h^{\text{rect}}| \geq h^2 \cdot \frac{b-a}{24} \cdot \min_{[a,b]} |f''(x)|.$$

Příklad 107 *Jako příklad analyzujme chyby kvadratických formulí pro integrál*

$$I = \int_0^{1/2} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx,$$

který nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí, ale v aplikacích se často využívá.

Máme

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2},\ \ f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2},\ \ f''(x) = (4x^2-2)\mathrm{e}^{-x^2},$$

$$f'''(x) = (-8x^3+12x)\mathrm{e}^{-x^2},\ f^{(4)}(x) = 4(4x^4-12x^2+3)\mathrm{e}^{-x^2},$$

a

$$\mathrm{e}^{-1/4} \leq |f''(x)| \leq 2,\ \ |f^{(4)}(x)| \leq 12$$

pro $x \in [0, 1/2]$.

Tedy pro $h = 0.05$ dostáváme

$$0.4 \cdot 10^{-4} \leq |I - I_h^{\text{rect}}| \leq 0.11 \cdot 10^{-3}$$

a

$$|I - I_h^{\text{Simp}}| \leq 0.21 \cdot 10^{-6}.$$

Horní odhad chyby Simpsonova pravidla je výrazně nižší než dolní odhad chyby obdélníkového pravidla.

11.10 Nevlastní integrály

V této části se budeme věnovat dvěma typům určitých integrálů. Budou to jednak integrály, ve kterých jedna nebo obě meze jsou nekonečné a jednak integrály, ve kterých je integrand nespojitou funkcí. Takovým integrálům říkáme nevlastní.

1. Nevlastní integrály vlivem intervalu

Uvažujme určitý integrál s proměnnou horní mezí

$$I(l) = \int_a^l f(x)\,dx.$$

Nechť l roste nade všechny meze. Potom existují dvě možnosti, totiž buď má $I(l)$ konečnou (tzv. vlastní) limitu pro $l \to +\infty$ nebo nikoli.

Definice 109 *Nevlastní integrál*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

funkce $f(x)$ na intervalu $[a, \infty)$ definujeme jako limitu integrálu

$$\int_a^l f(x)\,dx$$

pro $l \to \infty$, za předpokladu, že tato limita existuje (a je konečná), tj.

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{l\to\infty} \int_a^l f(x)\,dx.$$

V takovém případě, říkáme, že nevlastní integrál konverguje; v opačném případě říkáme, že diverguje (limita je nekonečná nebo vůbec neexistuje).

Příklad 108 *Podle definice nalézáme:*

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{l\to\infty} \left[e^{-x}\right]\Big|_0^l = \lim_{l\to\infty} \left[-e^{-l} + e^0\right] = 0 + 1 = 1.$$

Daný nevlastní integrál tedy konverguje.

Příklad 109

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{l\to\infty} \ln|x|\big|_1^l = \lim_{l\to\infty} [\ln|l| - \ln 1] = \infty.$$

Nevlastní integrál diverguje.

Další případy nevlastních integrálů definujeme podobně:

1. dolní mez je nekonečná:

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{l\to\infty} \int_{-l}^a f(x)\,dx;$$

2. obě meze jsou nekonečné:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{l\to\infty} \int_{-l}^a f(x)\,dx + \lim_{p\to\infty} \int_a^p f(x)\,dx;$$

3. v posledním případě je často uvažován případ, kdy jak l,tak i p konvergují k nekonečnu stejnou rychlostí, tj. případ $l = p$. V literatuře je tento případ nazýván hlavní hodnotou a označován *V.p.* (z francouzštiny: "Valeur principale" - hlavní hodnota). Definujeme tedy ve smyslu hlavní hodnoty:

$$\text{V.}p.\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{l\to\infty}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx.$$

2. Nevlastní integrály vlivem funkce

Definice 110 *Nevlastní integrál*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

funkce $f(x)$ spojité na intervalu $x \in [a,b)$ a neomezené pro $x \to b$ je limita integrálu

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

pro $\varepsilon \to 0^+$ pokud tato limita existuje (a je konečná), tj.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

V takovém případě říkáme, že nevlastní integrál konverguje, v opačném případě říkáme, že nevlastní integrál diverguje.

Podobně, pokud je funkce $f(x)$ spojitá na $[a,b]$ a neomezená v levém koncovém bodě $x = a$, pokládáme

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0^+}\int_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx.$$

Pokud jsou body nespojitosti pouze v bodech $x = a$ a $x = b$, pak pro libovolně vybraný bod $c \in (a,b)$ definujeme

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0^+}\int_{a+\delta}^{c} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_c^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

Poznamenejme, že podobně jako v předchozí části můžeme definovat hlavní hodnotu integrálu.

Příklad 110 *Podle definice je*

$$\int_0^{10}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\delta\to 0^+}\int_\delta^{10}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\delta\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_\delta^{10} = 2\sqrt{10}\,.$$

Tedy nevlastní integrál konverguje.

Příklad 111 *Podle definice je*

$$\int_0^{10}\frac{dx}{x} = \lim_{\delta\to 0^+}\int_\delta^{10}\frac{dx}{x} = \lim_{\delta\to 0^+} \ln|x|\Big|_\delta^{10} = +\infty.$$

To znamená, že nevlastní integrál diverguje.

11.11 Aplikace určitého integrálu

V této části jsou uvedeny některé možnosti využití určitého integrálu. Vzorce jsou uvedeny většinou bez důkazů.

1. Obsah rovinného obrazce

Jak bylo uvedeno v částech 11.1 a 11.2 je plocha obrazce S omezeného křivkou $y = f(x) \in C$ (viz. obrázek 11.1.1) dána vztahem

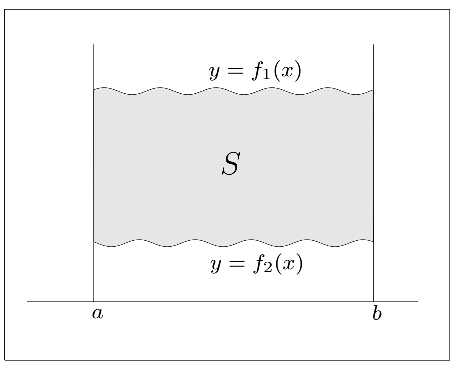
$$P_S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Je-li křivka $y = f(x)$ dána parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t) \in C^1, y = \xi(t) \in C, \alpha \leq t \leq \beta, \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b, \phi'(t) > 0 \text{na} [\alpha, \beta]$ pak

$$P_S = \int_\alpha^\beta \xi(t)\varphi'(t)\,dt.$$

Plocha obrazce S mezi dvěma křivkami $y = f_1(x) \in C$ a $y = f_2(x) \in C$ (viz obrázek 11.11.1) je vyjádřena vztahem

$$P_S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx.$$

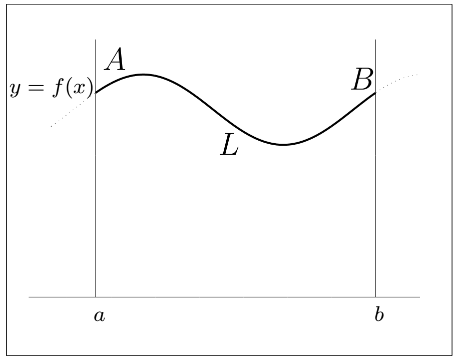


Obrázek 11.11.1: Plocha obrazce mezi dvěma křivkami

2. Délka oblouku

Je-li křivka dána vztahem $y = f(x) \in C^1$, pak je její délka mezi body A a B (viz obrázek 11.11.2)

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$



Obrázek 11.11.2: Délka oblouku

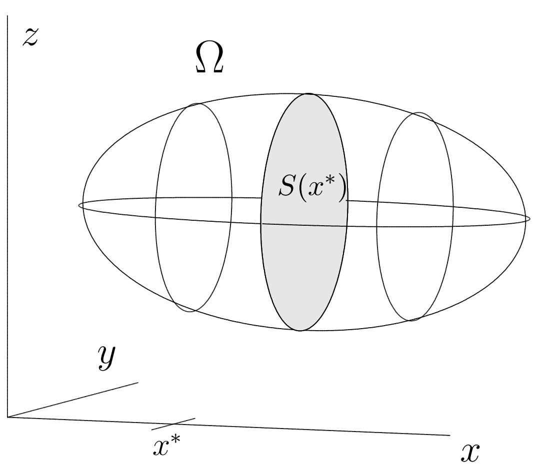
V případě parametrického zadání křivky, tj. je-li $x = \varphi(t) \in C^1, y = \psi(t) \in C^1, \alpha \leq t \leq \beta, \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$,platí

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt.$$

Příklad 112 *Půlkružnice je dána parametrickými rovnicemi* $x = \cos t, y = \sin t, t \in [0, \pi]$*. Proto je její délka L:*

$$L = \int_{0}^{\pi} \sqrt{[\sin(t)]^2 + [\cos(t)]^2}\, dt = \int_{0}^{\pi} dt = \pi.$$

3. Objem tělesa



Obrázek 11.11.3: Objem tělesa

Naší úlohou je najít objem V_Ω prostorového tělesa Ω znázorněného na obrázku 11.11.3. Toto těleso se nachází mezi dvěma rovinami o rovnicích $x = a$ a $x = b$. Budeme předpokládat, že plocha řezu tělesa Ω rovinou $x = x^*$ je známa a je určena spojitou funkcí $P = S(x^*)$, pro každé $x^* \in [a, b]$. Pak

$$V_\Omega = \int_a^b S(x)\,dx.$$

4. Objem rotačního tělesa

Vzniklo-li uvažované těleso Ω rotací křivostranného lichoběžníka KL omezeného křivkou $y = f(x)$ kolem osy x je plocha řezu tělesa Ω rovinou $x = x^*$ plochou kruhu o poloměru $r = f(x^*)$, tedy $S(x^*) = \pi f^2(x^*)$. Pak platí

$$V_\Omega = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Je-li křivka $y = f(x)$ zadána parametricky, tj. $x = \varphi(t) \in C^1, y = \psi(t), t \in [\alpha, \beta], \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b, \varphi'(t) > 0$, pak

$$V_\Omega = \pi \int_\alpha^\beta \psi^2(t)\varphi'(t)\,dt.$$

5. Obsah rotační plochy

Je-li $y = f(x) \in C^1$, pak je plošný obsah Q_Ω rotační plochy, která je pláštěm tělesa Ω určena vztahem

$$Q_\Omega = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

V parametrickém případě, když $x = \varphi(t) \in C^1, y = \psi(t) \in C^1, t \in [\alpha, \beta], \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ platí:

$$Q_\Omega = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt.$$

11.12 Integrace s programem MAPLE V

1. Analytická integrace s programem MAPLE

Důležitou částí programu Maple je možnost analytické integrace. Ta se provádí pomocí příkazu `"int"`, jehož syntaxe je podobná jako syntaxe příkazu `"diff"`.

Příklad 113 *Najděte integrál*

$$\int x^2\,dx.$$

pomocí MAPLE V.

Řešení. Napišme odovídající příkaz v MAPLE:

```
int(x*x,x);
```

Výsledek vypsaný programem MAPLE je tvaru:

$$\frac{1}{3}x^3.$$

Příklad 114 *Najděte integrál*

$$\int x\mathrm{e}^x\,dx.$$

pomocí MAPLE V (viz Příklad 104).

Řešení. Napišme odpovídající příkaz v MAPLE:

```
int(x*x,x);
```

Výsledek, vypsaný programem MAPLE, je tvaru:

$$x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x.$$

Všimněme si, že ve výsledku vypsaném programem MAPLE integrační konstanta chybí.

2. Určité integrály s programem MAPLE

Příklad 115 *Najděte integrál*

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t^{3/2}}\,dt$$

pomocí MAPLE V.

Řešení. Napišme odpovídající příkaz programu MAPLE:

```
int(exp(-t)/(1+t^(3/2)),t=0..infinity);
```

Výsledek vypsaný programem MAPLE je příliš neohrabaný. V tomto případě — protože výsledkem je konstatny — lze použít příkazu `"evalf"` pro nalezení numerické aproximace:

```
evalf(%);
```

Nyní MAPLE dává numerický výsledek:

$$.613073060.$$

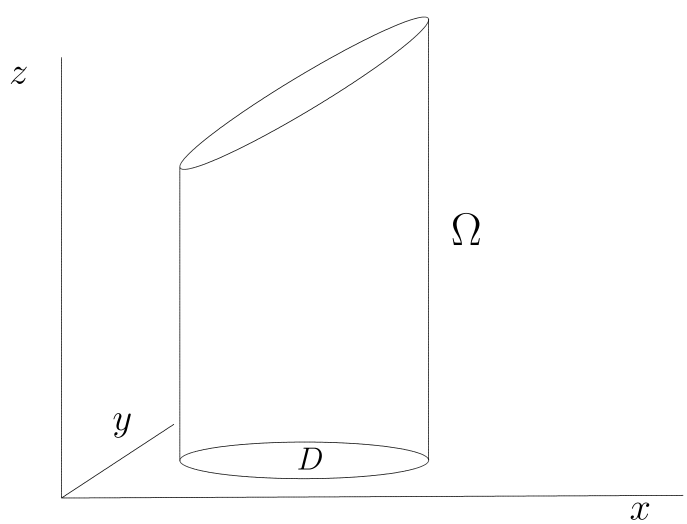
Kapitola 12

Dvojrozměrný a vícerozměrný integrál (křivkový a plošný integrál)

12.1 Integrální počet funkcí více proměnných

1. Objem křivostěnného válce

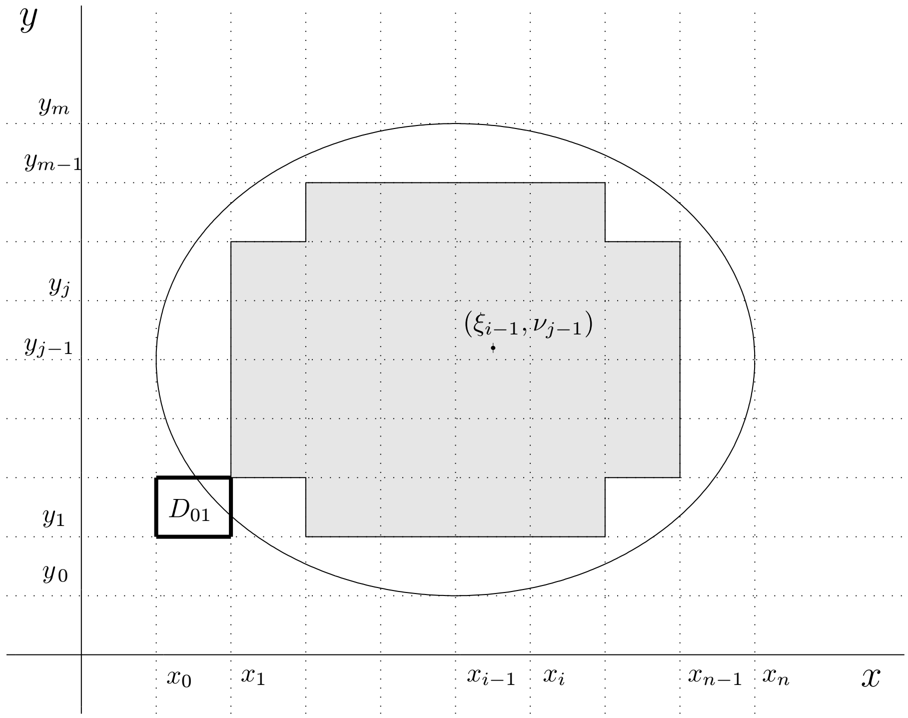
Uvažujme prostorové těleso Ω, které ma tvar křivostěnného válce (viz. obrázek 12.1.1) jehož základna je D a shora je omezeno plochou $z = f(x, y) \in C(D)$. Budeme se zabývat úlohou o nalezení objemu tělesa Ω.



Obrázek 12.1.1: Objem tělesa - dvojný integrál

Označme hledaný objem V_Ω. Rozdělíme v rovině $z = 0$ základnu D cylindroidu Ω na podoblasti pomocí dvou soustav rovnoběžných přímek o rovnicích $x = C_1, y = C_2$, kde C_1, C_2 jsou konstanty. Tento systém rovnoběžných přímek procházejících na ose x body $x_0, x_1, \dots, x_n$ a na ose y body $y_0, y_1, \dots, y_m$ rozdělí základnu D na podoblasti D_{ij},

$i = 0, \ldots, n-1$; $j = 0, \ldots, m-1$ (viz. obrázek 1.). Dále budeme uvažovat jen ty podoblasti, které jsou podmnožinou D, tj. pro které platí $D_{ij} \subset D$ (viz. vybarvené obdélníky na obrázku 1.).



Obrázek 12.1.2: Objem tělesa - dvojný integrál

Plocha každé z podoblastí D_{ij} je rovna $\Delta x_i \cdot \Delta y_j$, kde $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$. Objem Ω je přibližně roven tzv. *integrálnímu součtu,* tj.

$$V_\Omega \approx \sum_{i=0,j=0}^{n-1,m-1} f(\xi_i, \nu_j) \Delta x_i \Delta y_j,$$

kde bod (ξ_i, ν_j) je libovolně vybraný bod v podoblasti D_{ij}. Označme $\Delta = \max_{i,j}\{\Delta x_i, \Delta y_j\}$. Pak pro objem V_Ω dostáváme přesné vyjádření

$$V_\Omega = \lim_{n,m\to\infty,\Delta\to 0} \sum_{i=0,j=0}^{n-1,m-1} f(\xi_i, \nu_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

za předpokladu, že limita existuje a je konečná.

2. Definice dvojného integrálu

Značení v tomto odstavci je shodné se značením v předchozím odstavci.

Definice 111 *Limita (za předpokladu, že existuje a je konečná)*

$$\lim_{n,m\to\infty,\Delta\to 0} \sum_{i=0,j=0}^{n-1,m-1} f(\xi_i,\nu_j)\Delta x_i \Delta y_j$$

se nazývá dvojný integrál funkce $f(x,y)$ přes oblast D. Tuto skutečnost zapisujeme následovně:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{n,m\to\infty,\Delta\to 0} \sum_{i=0,j=0}^{n-1,m-1} f(\xi_i,\nu_j)\Delta x_i \Delta y_j.$$

Geometrický význam dvojného integrálu byl podán v předchozím odstavci. Oblast D nazýváme též integrační obor.

3. Některé vlastnosti dvojného integrálu

1. Dvojný integrál součtu (nebo rozdílu) dvou funkcí je roven součtu (nebo rozdílu) jejích dvojných integrálů:
$$\iint\limits_D [f(x,y) \pm \varphi(x,y)]\,dxdy = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \pm \iint\limits_D \varphi(x,y)\,dxdy.$$

2. Konstanta v integrandu může být vytknuta před symbol dvojného integrálu:
$$\iint\limits_D Cf(x,y)\,dxdy = C\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy.$$

3. Je-li integrační obor D rozdělen na dva obory D_1 a D_2, které nemají společné žádné *vnitřní body,* pak
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy.$$

4. Pokud dvě funkce $f(x,y)$ a $\varphi(x,y)$ splňují podmínku
$$f(x,y) \geq \varphi(x,y)$$
ve všech bodech oboru integrace, pak
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \geq \iint\limits_D \varphi(x,y)\,dxdy.$$

5. Platí:
$$\iint\limits_D dxdy = S_D,$$
kde S_D je plocha oblasti D.

6. Pokud existují konstanty m a M takové, že

$$m \leq f(x,y) \leq M$$

pro $(x,y) \in D$, pak

$$mS_D \leq \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \leq MS_D.$$

7. Je-li $f(x,y) \in C(D)$, pak existuje bod $(\xi,\nu) \in D$ takový, že

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = f(\xi,\nu) \cdot S.$$

Tento vzorec se nazývá **věta o střední hodnotě** pro dvojný integrál a často je zapisován ve tvaru:

$$f(\xi,\nu) = \frac{1}{S} \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy.$$

8.

$$\left| \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|\,dxdy.$$

4. Vyčíslení hodnoty dvojného integrálu

Ukážeme nyní postupy vedoucí k výpočtu dvojných integrálů. Nejprve zavedeme pojmy tzv. elementárních oblastí.

Definice 112 *Elementární oblast prvního typu D_1 je definována jako množina*

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\},$$

kde $f_1(x)$ a $f_2(x)$ jsou dané spojité funkce.

Elementární oblast druhého typu D_2 je definována jako množina

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, a \leq y \leq b, \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)\},$$

kde $\varphi_1(x)$ a $\varphi_2(x)$ jsou dané spojité funkce.

Připomeňme, že problémem výpočtu objemu tělesa jsme se již zabývali v souvislosti s aplikacemi určitého integrálu na geometrické problémy. Uvedli jsme vztah (viz. část 3.)

$$V_\Omega = \int_a^b S(x)\,dx$$

pro objem tělesa, kde $S(x^*)$ je plocha řezu tělesa Ω rovinou $x = x^*$. Protože pro výpočet plochy řezu lze užít vztah

$$S(x^*) = \int\limits_{f_1(x^*)}^{f_2(x^*)} f(x^*,y)\,dy,$$

dostáváme

$$V_\Omega = \int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\, dy \right] dx.$$

Tím jsme odvodili tzv. *Fubiniho* větu (pro dvojný integrál):

$$\iint\limits_{D_1} f(x,y)\, dxdy = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\, dy.$$

Analogicky dostáváme

$$\iint\limits_{D_2} f(x,y)\, dxdy = \int_a^b dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\, dx.$$

Tyto vztahy ukazují, jak se výpočet dvojného integrálu redukuje na dva následující obyčejné určité integrály; je třeba mít na paměti, že ve vniřním integrálu je jedna z proměnných považována v procesu integrování za konstantu. Rozvoj pravých stran těchto vztahů se nazývá (dvojité) iterování nebo opakované integrály, celý proces výpočtu popisujeme jako redukci dvojného integrálu na iterované integrály.

Redukce dvojného integrálu na iterovaný integrál je obzvlášť jednoduchá v případě, že oblast integrace D je obdélník se stranami rovnoběžnými se souřadnými osami. V tomto případě jsou meze vnějšího i vnitřního integrálu konstantami:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\, dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\, dx.$$

Příklad 116 *Najděme objem V tělesa omezeného plochou $z = 1 - 4x^2 - y^2$ a rovinou Oxy.*
Řešení. *Těleso je část eliptického paraboloidu ležícího nad rovinou Oxy. Paraboloid protíná rovinu xy v elipse $4x^2 + y^2 = 1$. Problém se tak redukuje na výpočet objemu* cylindroidu *bez postranní cylindrické plochy omezené shora paraboloidem $z = 1 - 4x^2 - y^2$ a s vnitřkem elipsy jako základnou. Uvažované těleso je symetrické vzhledem k rovinám Oxz a Oyz, a tak stačí určit čtvrtinu objemu v prvním oktantu. Ta je rovna dvojnému integrálu přes oblast určenou podmínkami*

$$4x^2 + y^2 \le 1, \;\; x \ge 0, \;\; y \ge 0,$$

tj. přes čtvrtinu elipsy. Integrujeme-li vzhledem k y a pak vzhledem k x, dostáváme

$$\frac{1}{4}V = \int_0^{1/2} dx \int_0^{\sqrt{1-4x^4}} (1 - 4x^2 - y^2)\, dy =$$

$$= \int_0^{1/2} dx \left[y - 4x^2 y - \frac{1}{3}y^3\right]\Bigg|_0^{\sqrt{1-4x^4}} =$$

$$= \int_0^{1/2} \left[(1-4x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}\right] dx = \frac{2}{3}\int_0^{1/2} \left[1-4x^2\right]^{\frac{3}{2}} dx =$$

$$= \left\{ x = \frac{1}{2}\sin t \right\} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} [1-\sin^2 t]^{\frac{3}{2}} \cos t\, dt = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^4 t\, dt =$$

$$= \left\{ \cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t),\ \cos^4 t = \frac{1}{4}\left[1 + 2\cos 2t + \frac{1}{2}(1+\cos 4t)\right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{12}\int_0^{\pi/2} \left[\frac{3}{2} + 2\cos 2t + \frac{1}{2}\cos^4 t\right] dt = \frac{1}{12}\left[\frac{3}{2} + \sin 2t\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{8}\sin 4t\Big|_0^{\pi/2}\right] =$$

$$= \frac{3\pi}{48} = \frac{\pi}{16}\ .$$

tedy

$$V = \frac{\pi}{4}.$$

5. Trojný integrál

Trojný integrál definujeme podobným způsobem jako dvojný integrál v části 2. Nechť funkce $u = f(x,y,z)$ je definována na množině

$$D \subset \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, a \le x \le b, c \le y \le d, e \le z \ \le f\}.$$

Rozdělme intervaly $[a,b], [c,d], [e,f]$ do podintervalů:

$$[a,b] = \cup_{i=1}^{n-1}[x_i, x_{i+1}], \text{ kde } a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$
$$[c,d] = \cup_{j=1}^{m-1}[y_j, y_{j+1}], \text{ kde } c = y_1 < y_2 < \cdots < y_n = d,$$
$$[e,f] = \cup_{k=1}^{o-1}[z_k, z_{k+1}], \text{ kde } e = z_1 < z_2 < \cdots < z_n = f.$$

Definujme podoblasti

$$D_{ijk} = \{(x,y,z) : x_i \le x \le x_{i+1}, y_j \le y \le y_{j+1}, z_k \le z \ \le z_{k+1}\},$$

kde $i \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}, j \in \{0,1,2,\ldots,m-1\}, k \in \{0,1,2,\ldots,o-1\}$ a budeme uvažovat pouze takové podoblasti D_{ijk}, které jsou podmnožinami D,tj. $D_{ijk} \subset D$. V každé podoblasti D_{ijk} vybereme bod

$$(\xi_i, \nu_j, \eta_k) \in D_{ijk}$$

a definujeme číslo

$$\Delta = \max_{i,j,k}(\Delta x_i, \Delta y_j, \Delta z_k).$$

Definice 113 *Trojný integrál funkce $f(x,y,z)$ na oblasti D je definován jako limita integrálního součtu (za předpokladu, že existuje a je konečná), tj.*

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \lim_{\substack{n,m,o\to\infty \\ \Delta\to 0}} \sum_{i,k,j=0}^{n-1,m-1,o-1} f(\xi_i,\nu_k,\eta_k)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k.$$

Poznámka 27 *Vlastnosti dvojného integrálu lze bez zásadních změn rozšířit na trojné integrály.*

6. Geometrický a fyzikální význam trojného integrálu

a) Geometrický význam. Je-li integrand $f(x,y,z)$ identicky roven jedné, trojný integrál vyjadřuje objem V_D oblasti D :

$$V_D = \iiint_D dxdydz.$$

a) Fyzikální význam. Uvažujme těleso zaujímající v prostoru oblast D. Budeme předpokládat, že rozložení hustoty hmoty v tělese je dáno funkcí spojitou na $D : \delta = \delta(x,y,z)$ (kg/m^3). Celková hmota M_D nehomogenního tělesa D je rovna

$$M_D = \iiint_D \delta(x,y,z)\,dxdydz.$$

7. Vyčíslení hodnoty trojného integrálu

Zaveďme *elementární oblasti* potřebné pro výpočet hodnoty trojného integrálu

$$\begin{aligned}
&M_1\{(x,y,z):\ a\le x\le b, f_1(x)\le y\le f_2(x),\ F_1(x,y)\le z\ \le F_2(x,y)\},\\
&M_2\{(x,y,z):\ a\le x\le b, f_1^0(x)\le z\ \le f_2^0(x),\ F_1^0(x,z)\le y\le F_2^0(x,z)\},\\
&M_3\{(x,y,z):\ a\le y\le b, \varphi_1(y)\le x\le \varphi_2(y),\ \Phi_1(x,y)\le z\ \le \Phi_2(x,y)\},\\
&M_4\{(x,y,z):\ a\le y\le b, \varphi_1^0(y)\le z\ \le \varphi_2^0(y),\ \Phi_1^0(y,z)\le x\le \Phi_2^0(y,z)\},\\
&M_5\{(x,y,z):\ a\le z\ \le b, \omega_1(z)\le x\le \omega_2(z),\ \Omega_1(x,z)\le y\le \Omega_2(x,z)\},\\
&M_6\{(x,y,z):\ a\le z\ \le b, \omega_1^0(z)\le y\le \omega_2^0(z),\ \Omega_1^0(y,z)\le x\le \Omega_2^0(y,z)\}.
\end{aligned}$$

Věta 12.1.1 Fubiniho věty *(pro trojné integrály):*

$$\iiint_{M_1} f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy \int_{F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz,$$
$$\iiint_{M_2} f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b dx \int_{f_1^0(x)}^{f_2^0(x)} dz \int_{F_1^0(x,z)}^{F_2^0(x,z)} f(x,y,z)\,dy$$

atd.

Příklad 117 *Vypočtěme trojný integrál*

$$I = \iiint_D (x+y+z)\,dxdydz$$

na oblasti D omezené rovinami $x=0$, $y=0$, $z=0$ a rovinou $x+y+z=1$.
Řešení. *Oblast D může být zapsána ve tvaru*

$$D = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1-x,\, 0 \le z \le 1-x-y\}.$$

Tedy

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x+y+z)\,dz =$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[(x+y)z + \frac{1}{2}z^2\right]\Big|_0^{1-x-y} =$$
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[(x+y) - (x+y)^2 + \frac{1}{2}(1-x-y)^2\right] dy =$$
$$= \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2}(x+y)^2 - \frac{1}{3}(x+y)^3 - \frac{1}{6}(1-x-y)^3\right]\Big|_0^{1-x} =$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}(1-x)^3\right] dx =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{12} - \frac{1}{24}(1-x)^4\Big|_0^1 =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{1}{24}[12 - 4 - 8 + 2 + 1] = \frac{1}{8}\ .$$

8. Křivkové integrály

a) Motivace. Hmota vedení (drátu).

Představme si tenký drát ve tvaru křivky C s koncovými body A a B. Předpokládejme, že drát má proměnnou hustotu danou v bodě (x,y,z) spojitou funkcí $f(x,y,z)$, v gramech na 1 cm délky. Nechť

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

je hladká parametrizace křivky C, $t=a$ odpovídá počátečnímu bodu A křivky a $t=b$ odpovídá jejímu koncovému bodu B. Abychom odhadli celkovou hmotu m drátu, začneme rozdělením

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

intervalu $[a,b]$ do n subintervalů. Tyto dělicí body $[a,b]$ dávají podle naší parametrizace fyzické rozdělení drátu do krátkých segmentů křivky. Označme P_i bod

$$(x(t_i), y(t_i), z(t_i)),\ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Pak můžeme aproximovat hmotu drátu:

$$m \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta s_i,$$

kde Δs_i je délka (vždy **kladná**) segmentu křivky C mezi body P_i, P_{i+1} a $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ je libovolný bod uvedeného intervalu. Limita tohoto součtu při $\Delta t \to 0$ (nebo pro $\Delta s \ \to 0$) je celková hmota m. Toto je naše motivace pro definici křivkového integrálu funkce f podle křivky C. Označujeme:

$$m = \int_C f(x,y,z)\,ds = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta s_i.$$

b) Křivkový integrál (prvního typu)

Definice 114 *Předpokládejme, že $f(x,y,z)$ je spojitá v každém bodě hladké parametrické křivky C od bodu A do bodu B. Potom křivkový integrál funkce f podle křivky C od A do B vzhledem k délce oblouku je definován jako*

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta s_i,$$

za předpokladu, že limita existuje a je konečná.

c) Výpočet křivkového integrálu prvního typu

Nechť

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

je hladká parametrizace křivky C, $t = a$ odpovídá počátečnímu bodu A křivky a $t = b$ jejímu koncovému bodu B. Pak

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt.$$

Toto je obyčejný integrál vzhledem k jedné proměnné t. Je-li $z \equiv 0$,tj. křivka C leží v rovině xy, máme

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt.$$

Příklad 118 *Vypočtěte křivkový integrál*

$$I = \int_C xy\,ds,$$

kde C je čtvrtina kružnice s parametrizací

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}\,.$$

Řešení. *Z předchozího vztahu vidíme, že*

$$I = \int_C xy\,ds = \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2t\,dt = \frac{1}{2}\,\frac{-\cos 2t}{2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}(1+1) = \frac{1}{2}.$$

d) Křivkový integrál vzhledem k souřadnicovým proměnným (Křivkový integrál druhého typu)

Křivkový integrál f podél křivky C vzhledem k proměnné x je definován jako limita (o které předpokládáme, že existuje a je konečná):

$$\int_C f(x,y,z)dx = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

(Δx_i *nemusí zachovávat znaménko*). Tedy (předpokládáme-li stejnou parametrizaci křivky C jako v předchozí části):

$$\int_C f(x,y,z)dx = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))x'(t)dt.$$

Podobně křivkové integrály f podél C vzhledem k y a vzhledem k z jsou dány vztahy

$$\int_C f(x,y,z)dy = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))y'(t)dt$$

a

$$\int_C f(x,y,z)dz = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))z'(t)dt.$$

Poslední tři integrály se typicky vyskytují spolu. Jsou-li P, Q a R spojité funkce proměnných x, y a z, pak definujeme *křivkový integrál druhého typu* jako

$$\int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Příklad 119 *Vypočtěte integrál*

$$I = \int_C ydx + zdy + xdz,$$

kde C je parametrická křivka $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3,\ 0 \le t \le 1.$
Řešení. *Užitím předchozích vztahů dostáváme*

$$I = \int_0^1 (t^2 + t^3 \cdot 2t + t \cdot 3t^2)\,dt = \int_0^1 (t^2 + 3t^3 + 2t^4)\,dt =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{1}{60}(20 + 45 + 24) = \frac{89}{60}\,.$$

e) Rozdíly mezi křivkovými integrály prvního a druhého typu

Předpokládejme, že orientaci křivky C (směr, v němž se pohybuje bod křivky při rostoucím t) obrátíme. Potom, kvůli $x'(t), y'(t), z'(t)$, se znaménko křivkového integrálu druhého typu obrátí. Tato změna orientace však nemění hodnotu křivkového integrálu prvního typu. Tuto skutečnost lze zapsat následovně:

$$\int_{C^-} f\,ds = \int_C f\,ds$$

oproti vzorci

$$\int_{C^-} Pdx + Qdy + Rdz = -\int_C Pdx + Qdy + Rdz,$$

kde symbol C^- označuje křivku C s opačnou orientací (tj. z B do A místo z A do B).

9. Křivkové integrály a práce

Předpokládejme, že

$$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

je silové pole definované na oblasti, která obsahuje křivku C. Předpokládejme, že C má parametrizaci

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b]$$

s nenulovým vektorem rychlosti

$$\vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}.$$

Rychlost asociovaná s tímto vektorem je

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,.$$

Jednotkový tečný vektor ke křivce C je roven

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{v(t)} = \frac{1}{v(t)}(x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}).$$

Chceme aproximovat práci W vykonanou silou $\vec{F}$ pohybem částice podél křivky C z A do B. Rozdělme křivku C na části . Uvažme sílu $\vec{F}$ pohybující částicí z bodu P_{i-1} do bodu P_i. Vykonaná práce ΔW_i je přibližně součin vzdálenosti Δs_i mezi body P_{i-1} a P_i (měřeno podél C) a tečné komponenty vektoru $\vec{F} \cdot \vec{T}$ síly $\vec{F}$ v typickém bodě

$$(x(t_i^*), y(t_i^*), z(t_i^*))$$

mezi P_{i-1} a P_i. Tedy

$$\Delta W_i \approx \vec{F}(x(t_i^*), y(t_i^*), z(t_i^*)) \cdot \vec{T}(t_i^*)\Delta s_i,$$

takže celková práce W je dána přibližně vztahem

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(x(t_i^*), y(t_i^*), z(t_i^*)) \cdot \vec{T}(t_i^*) \Delta s_i.$$

Tato aproximace naznačuje, že definujeme práci W jako

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds.$$

Je zvykem psát formálně

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \;\; d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$$

a

$$\vec{T} \, ds = d\vec{r}.$$

Pak

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Pro vyčíslení práce W je obvyklé vyjádřit její integrand podle parametru t.

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds = \int_a^b (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k})(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) \, dt =$$

$$= \int_a^b \left(P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} + R\frac{dz}{dt} \right) dt = \int_a^b (Pdx + Qdy + Rdz) \, .$$

Tedy

$$W = \int_a^b Pdx + Qdy + Rdz = \int_C Pdx + Qdy + Rdz.$$

10. Nezávislost křivkového integrálu na cestě

Věta 12.1.2 *Křivkový integrál*

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds$$

je nezávislý na tvaru křivky C tehdy a jen tehdy, jestliže

$$\vec{F} = \nabla f$$

pro nějakou funkci f.

Dokážeme pouze jednu část věty. Předpokládejme, že

$$\vec{F} = \nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z)$$

a C je cesta z A do B parametrizovaná podle parametru t in $[a, b]$. Pak

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds = \int_a^b \left(f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz \right) =$$

$$= \int_a^b \left(f'_x \frac{dx}{dt} + f'_y \frac{dy}{dt} + f'_z \frac{dz}{dt} \right) = \int_a^b [f(x(t), y(t), z(t))]'_t \, dt =$$

$$= f(x(b), y(b), z(b)) - f(x(a), y(a), z(a)).$$

Tedy

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{T} \, ds = f(B) - f(A).$$

Křivkový integrál závisí pouze na koncových bodech A a B křicky C a je tedy nezávislý na výběru určité cesty C, která je spojuje.

Věta 12.1.3 *Jestliže*

$$P'_y = Q'_x,$$

pak

$$\int_C P \, dx + Q \, dy$$

je nezávislý na cestě a naopak.

Vypočtěme křivkový integrál pro tento případ:

$$I = \int_C P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy =$$

$$= \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt =$$

$$= \int_a^b [U(x(t), y(t))]'_t \, dt = U(x(b), y(b)) - U(x(a), y(a)) =$$

$$= U(x_1, y_1) - U(x_0, y_0).$$

Při výpočtu bylo použito značení:

$$U'_x(x, y) = P(x, y) \implies U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) \, dx + U(x_0, y),$$

$$U'_y(x, y) = Q(x, y) \implies U(x, y) = \int_{y_0}^y Q(x, y) \, dy + U(x, y_0)$$

a následně

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) \, dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) \, dy + U(x_0, y_0).$$

Tedy

$$I = U(x_1, y_1) - U(x_0, y_0) = \int_{x_0}^{x_1} P(x, y_1) \, dx + \int_{y_0}^{y_1} Q(x_0, y) \, dy.$$

11. Greenova věta

Nechť C je po částech hladká jednoduchá uzavřená křivka, která ohraničuje oblast D v rovině. Předpokládejme, že funkce $P(x,y)$ a $Q(x,y)$ jsou spojité a mají na D spojité parciální derivace prvního řádu. Pak

$$\int_{C^+} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D (Q'_x(x,y) - P'_y(x,y))\,dxdy.$$

Kladný směr C^+ (proti směru hodinových ručiček) podél křivky C je směr určený parametrizací $\vec{r}(t)$ křivky C takový, že oblast D zůstává vlevo a bod $\vec{r}(t)$ kopíruje hranici křivky C. Opačný směr nazýváme záporný (po směru hodinových ručiček)

12. Důsledek Greenovy věty

Plocha A oblasti D ohraničená po částech hladkou jednoduchou uzavřenou křivkou C je dána vzrocem

$$A_D = \frac{1}{2}\int_{C^+} (-y\,dx + x\,dy) = -\int_{C^+} y\,dx = \int_{C^+} x\,dy.$$

Důkaz. Pro $P(x,y) \equiv -y, Q(x,y) \equiv 0$ dává Greenova věta:

$$-\int_{C^+} y\,dx = \iint_D dx\,dy = A_D.$$

Podobně pro $P(x,y) \equiv 0, Q(x,y) \equiv x$ máme

$$\int_{C^+} x\,dy = \iint_D dx\,dy = A_D.$$

Součet těchto výsledků dává zbývající vztah.

13. Obsah plochy

Parametrická plocha S je obrazem vektoru

$$\vec{r}(u,v) = (x(u,v), (u,v), (u,v)),$$

kde $(u,v) \in D$. Nechť $u = C$ (tj. u je pevná konstatna C) Definujme vektor

$$\vec{S}_v = \vec{r}(C, v + \Delta v) - \vec{r}(C, v)$$

a definujme vektor $\vec{T}_v$ jako limitu:

$$\vec{T}_v = \lim_{\Delta v\ \to 0} \frac{\vec{S}_v}{\Delta v}\ .$$

Pak

$$\vec{T}_v =$$

$$= \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v}[(x(C, v + \Delta v) - x(C, v), y(C, v + \Delta v) - y(C, v), z(C, v + \Delta v) - z(C, v))]$$

a následně

$$\vec{T}_v = (x'_v(C, v), y'_v(C, v), z'_v(C, v)) \equiv \vec{r}_v.$$

Tedy

$$\vec{T}_v = \vec{r}_v = (x'_v, y'_v, z'_v)$$

a analogicky

$$\vec{T}_u = \vec{r}_u = (x'_u, y'_u, z'_u).$$

Nyní chceme *definovat obsah parametricky zadané plochy.* Začneme vnitřním rozdělením D do obdélníků $D_1, D_2, \ldots, D_n$, z nichž každý má rozměry Δu a Δv. Nechť (u_i, v_i) je levý dolní roh D_i. Obraz S_i oblasti D_i pod $\vec{r}$ obecně nebude obdélník v prostoru xyz. Bude vypadat spíše jako objekt, jehož hranicemi jsou křivky na ploše S s $\vec{r}(u_i, v_i)$ jako jedním z *uzlů.* Nechť ΔS_i označuje plochu tohoto křivostěnného objektu S_i. Parametrické křivky $\vec{r}(u, v_i)$ a $\vec{r}(u_i, v)$ - po řadě s parametry u a v - leží na ploše S a setkávají se v bodě $\vec{r}(u_i, v_i)$. V průsečíku mají tyto dvě křivky tečné vektory $\vec{r}_u(u_i, v_i)$ a $\vec{r}_v(u_i, v_i)$. Tedy jejich vektorový součet

$$\vec{N}(u_i, v_i) = \vec{r}_u(u_i, v_i) \times \vec{r}_v(u_i, v_i)$$

je normálový vektor k S v bodě $\vec{r}(u_i, v_i)$. Nyní předpokládejme, že Δu a Δv jsou malé. Potom plocha ΔS_i křivostěnného objektu S_i bude přibližně rovna ploše ΔP_i přilehlého rovnoběžníku se stranami $\vec{r}_u(u_i, v_i)\Delta u$ a $\vec{r}_v(u_i, v_i)\Delta v$ (protože $\vec{S}_v \approx \vec{T}_v \Delta v = \vec{r}_v \Delta v$ a analogicky $\vec{S}_u \approx \vec{T}_u \Delta u = \vec{r}_u \Delta u$). Avšak plocha tohoto rovnoběžníka je

$$\Delta P_i = |\vec{r}_v \Delta v \times \vec{r}_u \Delta u| = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \Delta u \; \Delta v = |\vec{N}(u_i, v_i)| \cdot \Delta u \; \Delta v \; .$$

To znamená, že plošný obsah P_S plochy S je přibližně dán vztahem

$$P_S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta P_i = \sum_{i=1}^{n} |\vec{N}(u_i, v_i)| \cdot \Delta u \; \Delta v.$$

Tento poslední součet je integrální součet pro dvojný integrál

$$\iint_D |\vec{N}(u, v)| \, dudv.$$

Plošný obsah P_S plochy S je tedy určen vztahem:

$$P_S = \iint_D |\vec{N}(u, v)| \, dudv = \iint_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, dudv.$$

14. Obsah plochy v pravoúhlých souřadnicích

Pro plochu $z = f(x, y) \in C^1$, $(x, y) \in D$ dosadíme v předešlé části $u = x$ and $v = y$. Pak

$$\vec{T}_x = (1, 0, f'_x(x, y)),$$

$$\vec{T}_y = (0, 1, f'_y(x, y))$$

a

$$\vec{N} = \vec{T}_x \times \vec{T}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f'_x(x, y) \\ 0 & 1 & f'_y(x, y) \end{vmatrix} = -f'_x(x, y)\vec{i} - f'_y(x, y)\vec{j} + \vec{k}.$$

Potom je plošný obsah plochy určen vztahem

$$P_S = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2}\, dxdy.$$

Příklad 120 *Najděme obsah elipsy, která je řezem válce $x^2 + y^2 = 1$ rovinou $z = 2x + 2y + 1$.*
Řešení. *Pomocí výše uvedeného vztahu dostáváme*

$$A = \iint_D \sqrt{1 + 4 + 4}\, dxdy = \iint_D 3\, dxdy = 3 \iint_D dxdy = 3\pi.$$

15. Plošné integrály

a) Plošný integrál prvního typu

Definice 115 *Plošný integrál prvního typu funkce $f(x, y, z)$ po ploše S je definován jako*

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(\vec{r}(u, v))|\vec{N}(u, v)|\, dudv =$$

$$\lim_{n,m\to\infty,\Delta\to 0} \sum_{i=1,j=1}^{n,m} f(\vec{r}(u_i, v_j))|\vec{N}(u_i, v_j)|\, \Delta u_i\ \Delta v_j,$$

za předpokladu, že limita existuje a je konečná a $\Delta = \max_{i,j}(\Delta u_i, \Delta v_i)$.

(Všimněme si, že $\vec{N}(u, v) = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$.)
Jestliže je plocha S popsána rovnicí $z = h(x, y) \in C^1$ pro $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, můžeme použít x a y jako parametry. V tom případě položíme $u = x, v = y$. Potom

$$\vec{r}_u = \vec{r}_x = (1, 0, h'_x(x, y)),$$

$$\vec{r}_v = \vec{r}_y = (0, 1, h'_y(x, y)),$$

$$|\vec{r}_x \times \vec{r}_y| = \left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & h'_x(x, y) \\ 0 & 1 & h'_y(x, y) \end{matrix} \right\| = | - \vec{i}h'_x(x, y) - \vec{j}h'_y(x, y) + \vec{k}| =$$

$$= \sqrt{1 + (h'_x(x, y))^2 + (h'_y(x, y))^2}$$

a

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(x, y, h(x, y))\sqrt{1 + (h'_x(x, y))^2 + (h'_y(x, y))^2}\, dxdy.$$

b) Plošný integrál druhého typu

Plošný integrál $\iint_S f(x,y,z)\,dS$ je analogický křivkovému integrálu $\int_C f(x,y)\,ds$. Existuje také druhý typ plošného integrálu, který je analogický křivkovému integrálu typu $\int_C P\,dx + D\,dy$. Pro definici plošného integrálu

$$\iint_S f(x,y,z)\,dxdy$$

s $dxdy$ místo dS nahradíme plošný element plochy $dS = |\vec{N}(u,v)|dudv$ v definici plošného integrálu prvního typu jeho projekcí do roviny xy. Abychom viděli, čeho tím dosáhneme, uvažujme jednotkový normálový vektor k ploše S

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma.$$

Protože

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix},$$

tj.

$$\vec{N} = \vec{i}\,\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + \vec{j}\,\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + \vec{k}\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$$

složky jednotkového normálového vektoru $\vec{n}$ jsou

$$\cos\alpha = \frac{1}{|\vec{N}|}\,\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\ \cos\beta = \frac{1}{|\vec{N}|}\,\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\ \cos\gamma = \frac{1}{|\vec{N}|}\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\ .$$

Pak

$$\iint_S f(x,y,z)\,dxdy = \iint_S f(x,y,z)\cos\gamma\,dS = \iint_D f(\vec{r}(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,dudv,$$

kde

$$dS = |\vec{N}(u,v)|dudv = |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|dudv.$$

Podobně definujeme

$$\iint_S f(x,y,z)\,dydz = \iint_S f(x,y,z)\cos\alpha\,dS = \iint_S f(\vec{r}(u,v))\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\,dudv$$

a

$$\iint_S f(x,y,z)\,dzdx = \iint_S f(x,y,z)\cos\beta\,dS = \iint_S f(\vec{r}(u,v))\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\,dudv.$$

Obecný plošný integrál druhého typu je definován jako součet

$$\iint_S P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dzdx + R(x,y,z)\,dxdy =$$
$$= \iint_S (P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma)\,dS =$$
$$= \iint_D \left(P(\vec{r}(u,v))\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q(\vec{r}(u,v))\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R(\vec{r}(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)dudv.$$

Zde $P(x,y,z), Q(x,y,z)$ a $R(x,y,z)$ jsou spojité funkce x, y a z.
Předpokládejme, že S je plocha daná vztahem $z = h(x,y) \in C^1, (x,y) \in D$. Potom můžeme položit $u = x, y = v$ a

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(y,z)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 0 & z'_x(x,y) \\ 1 & z'_y(x,y) \end{vmatrix} = -h'_x(x,y),$$

$$\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(z,x)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} z'_x(x,y) & 1 \\ z'_y(x,y) & 0 \end{vmatrix} = -h'_y(x,y),$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Tedy

$$\iint_S P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dzdx + R(x,y,z)\,dxdy =$$
$$= \iint_D (-P(x,y,h(x,y))h'_x - Q(x,y,h(x,y)))h'_y + R(x,y,h(x,y)))) \,dxdy.$$

16. Věta o divergenci

(Gaussova–Ostrogradského věta)

Předpokládejme, že S je uzavřená po částech hladká plocha, která ohraničuje v trojrozměrném prostoru oblast ω. Nechť

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

je vektor s funkcemi P, Q a R, které mají spojité parciální derivace prvního řádu na ω. Nechť $\vec{n}$ je *vnější* jednotkový normálový vektor k S. Potom **větu o divergenci** (neboli tzv. **Gaussova - Ostrogradského větu**) vyjádříme pomocí vzorce

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\,dS = \iiint_\omega \vec{\nabla} \cdot \vec{F}\,dV. \qquad (12.1.1)$$

Je zvykem formálně psát $dV = dx\,dy\,dz$ a

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{k}.$$

Vektor $\vec{\nabla}$ je symbolickým vektorem. Definujme tzv. **divergenci** vektoru $\vec{F}$:

$$\mathrm{div}\vec{F}(x,y,z) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x,y,z) = P'_x(x,y,z) + Q'_y(x,y,z) + R'_z(x,y,z).$$

Vyjádřeme vnější jednotkový normálový vektor $\vec{n}$ jako

$$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

Potom větu o divergenci (12.1.1) můžeme přepsat ve tvaru

$$\iint_S [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]\, dS =$$
$$= \iiint_\omega [P'_x(x,y,z) + Q'_y(x,y,z) + R'_z(x,y,z)]\, dxdydz,$$

nebo ve tvaru

$$\iint_S P(x,y,z)\, dydz + Q(x,y,z)\, dzdx + R(x,y,z)\, dxdy =$$
$$= \iiint_\omega [P'_x(x,y,z) + Q'_y(x,y,z) + R'_z(x,y,z)]\, dxdydz.$$

17. Stokesova věta

Definice 116 *Orientovaná plocha je plocha spolu s vybraným spojitým jednotkovým normálním vektorovým prostorem $\vec{n}$.* **Kladná orientace** *hranice C orientované plochy S odpovídá jednotkovému tečnému vektoru $\vec{T}$ hranice C takovému, že $\vec{n} \times \vec{T}$ vždy ukazuje do S.*

Přesvědčte se, že pro *rovinnou oblast* s jednotkovým normálním vektorem $\vec{k}$ je kladná orientace vnější hranice orientací proti směru hodinových ručiček.

Věta 12.1.4 *Nechť S je orientovaná, omezená a po částech hladká plocha v prostoru s pozitivně orientovanou hranicí. Předpokládejme, že složky vektoru $\vec{F}(x,y,z)$ mají spojité parciální derivace prvního řádu v části prostoru, která obsahuje S. Pak*

$$\oint_{L^+} \vec{F}\cdot\vec{T}\, ds = \iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\, dS, \tag{12.1.2}$$

kde L je hraniční křivka S.

Výraz $\operatorname{rot}\vec{F}$ se nazývá *rotace* vektoru $\vec{F}$ a vypočítáme ji podle vzorce

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$
$$= (R'_y - Q'_z)\vec{i} + (P'_z - R'_x)\vec{j} + (Q'_x - P'_y)\vec{k}.$$

Protože

$$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

a

$$\vec{T}\, ds = \vec{i}\, dx + \vec{j}\, dy + \vec{k}\, dz,$$
$$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

lze vzorec (12.1.2) přepsat ve tvaru

$$\int_{L^+} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$
$$\iint_S (R'_y - Q'_z)\,dydz + (P'_z - R'_x)\,dzdx + (Q'_x - P'_y)\,dxdy.$$

Kapitola 13

Vícerozměrný integrál II

18. Metoda substituce pro dvojné integrály

Věta 13.0.5 *Nahradíme-li proměnné x a y ve dvojném intergálu novými neznámými u, v podle vztahů*

$$\begin{aligned} x &= x(u,v) \in C^1 \\ y &= y(u,v) \in C^1, \end{aligned} \tag{13.0.1}$$

vzorec pro substituci bude mít tvar

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_G f[x(u,v), y(u,v)] \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv, \tag{13.0.2}$$

kde

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

a G je transformace oblasti D podle vzorců (13.0.1).

Poznámka 28 *Výraz J je (Jacobiho) funkcionální determinant (Jacobián).*

19. Dvojný integrál v polárních souřadnicích

Aplikujme obecný vztah na transformaci z kartézských souřadnic (x a y) na *polární souřadnice* (které budeme místo u, v označovat r a φ):

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Předpokládáme, že $r \geq 0$ a že úhel φ nabývá hodnot mezi 0 a $2\pi (\varphi \in [0, 2\pi))$.
Jacobián tohoto zobrazení je

$$J = \frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \cos\varphi \cdot r \cdot \cos\varphi - (-r\sin\varphi) \cdot \sin\varphi = r.$$

Tedy

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_G f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r\,drd\varphi.$$

Příklad 121 *Najděte*

$$I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy,$$

kde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \le x,\ 0 \le y,\ x^2 + y^2 \le a^2\}$$

a a je kladná konstanta.
Řešení. *Pro polární souřadnice máme*

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le x = r\cos\varphi \\ 0 \le y = r\sin\varphi \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \cos\varphi \ge 0 \\ \sin\varphi \ge 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

a dále $x^2 + y^2 = r^2 \le a^2 \Longrightarrow r \le a$. *Tedy pro novou oblast* G *dostáváme definici:*

$$G = \left\{(r, \varphi) : 0 \le r \le a,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Nakonec

$$I = \iint_G \sqrt{r^2} \cdot r\, drd\varphi = \iint_G r^2\, drd\varphi = \int_0^a r^2\, dr \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{\pi a^3}{6}\ .$$

Poznámka 29 *V některých případech je vhodné použít tzv. zobecněné polární souřadnice:*

$$x = ar\cos k\varphi,$$
$$x = br\sin k\varphi,$$

kde $k, a, b \in \mathbb{R}$.

20. Metoda substituce pro trojný integrál

Věta 13.0.6 *Je-li* $x = x(u, v, w) \in C^1$, $y = y(u, v, w) \in C^1$, $z = z(u, v, w) \in C^1$ *a oblast* D *je těmito funkcemi transformována na oblast* G*,pak*

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_G f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)]|J|\, dudvdw,$$

kde

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}\ .$$

K výpočtu trojných integrálů často užíváme cylindrické nebo sférické souřadnice. Proto je nyní stručně popíšeme.

21. Cylindrické souřadnice

Cylindrické souřadnice jsou definovány vztahy

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi,$$
$$z = z,$$

kde

$$0 \le r,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ z \in \mathbb{R}.$$

Pak je poloha bodu M jednoznačně charakterizována trojicí souřadnic (x, y, z) nebo trojicí souřadnic (r, φ, z), tj. $M(x, y, z) = M(r, \varphi, z)$ a Jacobián

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

V tomto případě

$$\iiint_D f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint_G f[r\cos\varphi, r\sin\varphi, z]r\,drd\varphi dz.$$

Příklad 122 *Vyčísleme*

$$I = \iiint_D z\,dxdydz,$$

kde

$$D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \le z, x^2 + y^2 + z^2 \le 6\}.$$

Řešení. *Oblast D je prostor mezi paraboloidem a sférou (kulovou plochou). Protože $r^2 \le z, r^2 + z^2 \le 6$, je průnikem těchto dvou ploch křivka daná rovnicí*

$$r^4 = 6 - r^2 \Longrightarrow (r^2 - 2)(r^2 + 3) = 0 \Longrightarrow r = \sqrt{2},\ z = 2$$

a

$$G = \{(r, \varphi, z) : 0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le r \le \sqrt{2}, r^2 \le z \ \le \sqrt{6 - r^2}\}.$$

Tedy

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r\,dr \int_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} z\,dz =$$
$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{r}{2}\ z^2\Big|_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}}\ dr = \pi \int_0^{\sqrt{2}} r\left[6 - r^2 - r^4\right]\,dr =$$
$$= \pi\left[\frac{6r^2}{2} - \frac{r^4}{4} - \frac{r^5}{5}\right]\Bigg|_0^{\sqrt{2}} = \pi\left[3\cdot 2 - 1 - \frac{8}{6}\right] = \pi\left[6 - 1 - \frac{4}{3}\right] = \frac{11\pi}{3}\ .$$

22. Sférické souřadnice

Sférické souřadnice jsou definovány vztahy

$$x = r\sin\psi\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\psi\sin\varphi,$$
$$z = r\cos\psi,$$

kde

$$0 \le r,\ \ 0 \le \psi < \pi,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Pak je poloha bodu M jednoznačně charakterizována trojicí souřadnic (x, y, z) nebo trojicí souřadnic (r, φ, ψ), tj. $M(x, y, z) = M(r, \varphi, \psi)$ a Jacobián

$$J = \begin{vmatrix} \sin\psi\cos\varphi & -r\sin\psi\sin\varphi & r\cos\psi\cos\varphi \\ \sin\psi\sin\varphi & r\sin\psi\cos\varphi & r\cos\psi\sin\varphi \\ \cos\psi & 0 & -r\sin\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= r^2(-\sin^3\psi\cos^2\varphi - \sin\psi\cos^2\psi\sin^2\varphi - \cos^2\psi\sin\psi\cos^2\varphi - \sin^3\psi\sin^2\varphi) =$$
$$= r^2(-\sin\psi\sin^2\psi - \sin\psi\cos^2\psi) = -r^2\sin\psi.$$

V tomto případě

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dxdydz =$$
$$= \iiint_G f[r\sin\psi\cos\varphi, r\sin\psi\sin\varphi, r\cos\psi] r^2\sin\psi\, drd\varphi d\psi.$$

Příklad 123 *Vyčísleme*

$$I = \iiint_D x^2\, dxdydz,$$

kde

$$D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}.$$

Řešení. *Oblast D může být ve sférických souřadnicích zapsána takto: $r^2 \le R^2$. Tedy*

$$I = \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} r^2\sin^2\psi\cos^2\varphi \cdot r^2\sin\psi\, d\psi =$$
$$= \frac{r^5}{5}\Big|_0^R \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3\psi\, d\psi =$$
$$= \frac{R^5}{5} \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\, d\varphi \int_0^{\pi} (1-\cos^2\psi)\sin\psi\, d\psi = [t = \cos\psi] =$$
$$= -\frac{R^5}{10}\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} \int_1^{-1} (1-t^2)\, dt = -\frac{2\pi R^5}{10}\left(t - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_1^{-1} =$$
$$= -\frac{2\pi R^5}{10}\left(-1 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3}\right) = -\frac{2\pi R^5}{10}\left(-2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{4\pi R^5}{15}\ .$$

Literatura

[1] Al-Chorezmi Muchammad ibn Músa: *Matematičeskyje traktaty,* Taškent, 1983

[2] L.Bican: *Lineární algebra,* SNTL 1979, rozšířené vydání 2001

[3] G.Birkhoff, T.C.Bartee: *Aplikovaná algebra,* Alfa, Bratislava 1981

[4] G.Birkhoff, S.MacLane: *Algebra,* Alfa,Bratislava 1973

[5] G.Birkhoff, S.MacLane: *Prehlad madernej algebry,* Alfa, Bratislava 1979

[6] A.N.Bogoljubov: *Matěmatiki i mechaniki,* Naukova dumka, Kyjev, 1983

[7] M.Demlová, J.Nagy: *Algebra,* MVšT —III, SNTL 1982

[8] Diofant: *Arifmetika,* Nauka, Moskva 1974

[9] L.I.Golovina: *Linějnaja algebra i někatorie jijo priloženija,* Nauka, Moskva 1979

[10] V.Havel,J.Holenda: *Linaární algebra,* SNTL 1984

[11] Z.Horský: *Množiny a matematické struktury,* MVšT — I, SNTL 1980

[12] Z.Horský: *Vektorové prostory,* MVšT — II, SNTL 1980

[13] B.Hrůza, H.Mrhačová: *Cvičení z algebry a geometrie,* VUT,1990

[14] P.Kaprálik, J.Tvarožek: *Zbierka riešených príkladov a úloh z lineárnej algebry a analytickej geometrie,* Alfa, Bratislava, 1987

[15] Vl. Kořínek: *Základy algebry,* Nakladatelství ČS AV, Praha, 1956

[16] L.Kučera, J.Nešetřil: *Algebraické metody diskretní matematiky,* SNTL, Praha 1988

[17] S.Míka: *Numerické metody algebry,* MVšT — IV, SNTL 1982

[18] T.šalát: *Metrické priestory,* Alfa, Bratislava 1981