ANALYTICKÁ GEOMETRIE

V PŘÍKLADECH

Marie Polcerová
Jaroslav Bayer

Úvod

Předložený učební text je koncipován jako pracovní sešit pro studenty 1. semestru chemické fakulty a to pro předmět Matematika I.

Kurz Matematika I s hodinovým rozsahem 4 hodiny přednášek a 5 hodin cvičení v zimním semestru je obsahově rozdělen na Lineární algebru (2/2), Matematickou analýzu (2/2) a Počítačová cvičení (0/1). Podstatnou část obsahu Lineární algebry tvoří analytická geometrie.

Obsahová náplň předloženého pracovního sešitu má seznámit studenty se základy analytické geometrie lineárních a kvadratických útvarů v rovině i v prostoru. Kapitoly v analytické geometrii jsou na některých středních školách probírány velmi spoře a dělají studentům nemalé potíže, zejména v prostorové představivosti, na kterou se potom navazuje nejen v diferenciálním a integrálním počtu, ale i v dalších předmětech na FCH.

Předložená studijní pomůcka má umožnit studentům lépe a pohodlněji pochopit přednášenou látku z matematiky, doplnit některé nedostatky ze střední školy a spojitě navázat na způsob vysokoškolského studia.

Autoři

Obsah

1 Analytická geometrie lineárních útvarů v rovině E_2 4
1.1 Vzdálenost *d* dvou bodů A, B 4
1.2 Pojem čáry a její rovnice v E_2 4
1.3 Polární souřadnice v E_2 5
1.4 Přímka v E_2 6
1.5 Vzdálenost bodu $M = (x_0; y_0)$ od přímky *p* 10
1.6 Svazek přímek 11
1.7 Obsah trojúhelníka ABC 12
2 Analytická geometrie lineárních útvarů v prostoru E_3 13
2.1 Pravoúhlá kartézská ortonormální soustava souřadnic 13
2.2 Semipolární neboli cylindrické souřadnice 13
2.3 Prostorové polární neboli sférické souřadnice 14
2.4 Rovnice plochy a prostorové čáry 14
2.5 Vektorová rovnice přímky 15
2.6 Vzdálenost bodu od přímky 15
2.7 Rovina v prostoru E_3 16
2.8 Normálový tvar rovnice roviny 16
2.9 Vzdálenost dvou rovin 17
2.10 Vzdálenost bodu od roviny 17
2.11 Vektorový tvar rovnice roviny 17
2.12 Úsekový tvar rovnice roviny 19
2.13 Zvláštní polohy rovin 19
2.14 Přímka jako průsečnice dvou rovin 20
2.15 Svazek rovin v E_3 20
2.16 Trs rovin v E_3 21
2.17 Úhel (odchylka) přímky od roviny 22
2.18 Úhel (odchylka) dvou rovin 22
3 Analytická geometrie kvadratických útvarů v rovině E_2 23
3.1 Obecná rovnice druhého stupně 23
3.2 Elipsa 25
3.3 Kružnice: 26
3.4 Hyperbola 27
3.5 Parabola 29
4 Kvadriky – kvadratické plochy v E_3 30
4.1 Elipsoid 30
4.2 Hyperboloid 31
4.3 Paraboloid 32
4.4 Kvadratická válcová plocha 33
4.5 Kvadratická kuželová plocha 34
5 Rotační plochy v E_3 35
5.1 Anuloid – rotační plocha čtvrtého stupně 37
6 Řešené příklady v E_3 38
7 Řešené příklady v E_2 49
8 Příklady k procvičení v E_3 56
9 Příklady k procvičení v E_2 59

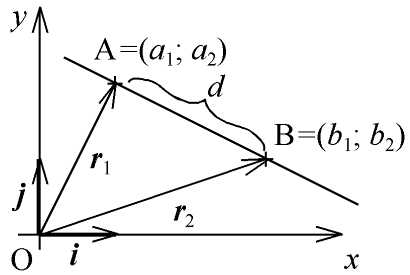
Analytická geometrie je část matematiky, která studuje vlastnosti geometrických útvarů a vztahy mezi nimi pomocí algebraických metod vektorové algebry a metody souřadnic. Těmto metodám souhrnně říkáme analytické metody – odtud název **analytická geometrie**.

Analytické vyjádření geometrického útvaru má tvar rovnice nebo nerovnice; v tom případě hovoříme o rovnici nebo nerovnici geometrického útvaru, ve které vystupují souřadnice proměnného bodu a další pevné body event. vektory, umístěné v soustavě souřadnic.

V rovině E_2 zvolíme dvě k sobě kolmé osy *x*, *y* a na nich jednotkové vektory: ***i***, ***j***. V prostoru E_3 zvolíme tři navzájem kolmé osy *x*, *y*, *z* a na nich jednotkové vektory: ***i***, ***j***, ***k***. Takto zvolenou souřadnicovou soustavu nazýváme kartézskou – ortonormální.

1 Analytická geometrie lineárních útvarů v rovině E_2

1.1 Vzdálenost *d* dvou bodů A, B



Vektor $\boldsymbol{AB}$ označme $\boldsymbol{d}$; $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$;

$\mathrm{A} = (a_1; a_2); \boldsymbol{OA} = \boldsymbol{r}_1 = (a_1; a_2) = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}$; a_1, a_2 …nazýváme souřadnice vektoru $\boldsymbol{r}_1$,

$\mathrm{B} = (b_1; b_2); \boldsymbol{OB} = \boldsymbol{r}_2 = (b_1; b_2) = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j}$; $b_1\boldsymbol{i}$, $b_2\boldsymbol{j}$ …nazýváme složky vektoru $\boldsymbol{r}_2$,

$$d = |\boldsymbol{d}| = |\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1| = |(b_1 - a_1)\boldsymbol{i} + (b_2 - a_2)\boldsymbol{j}\,| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}\ ;$$

$|\boldsymbol{AB}|$ …nazýváme velikost vektoru $\boldsymbol{AB}$; což je vzdálenost bodů A, B.

Příklad č. 1: Vypočítejte vzdálenost bodů C, D, jestliže $\mathrm{C} = (3; 5)$ a $\mathrm{D} = (1; 7)$.

Řešení: $d = \sqrt{(1-3)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2{,}828$.

Vzdálenost dvou bodů C, D je 2,828 jednotek.

1.2 Pojem čáry a její rovnice v E_2

Čáru (přímku nebo křivku) budeme chápat jako geometrické místo bodů. Rovnice (rovinné) čáry může být zapsána jako:

a) Implicitní rovnice: $\boxed{F(x, y) = 0}$, jsou-li splněny následující dvě podmínky:

1) souřadnice $(x; y)$ každého bodu čáry vyhovují rovnici $F(x, y) = 0$,

2) každý bod $(x; y)$, který splňuje rovnici $F(x, y) = 0$ patří dané čáře.

Ukázky: $2x - y + 1 = 0$ … přímka,

$x^2 + y^2 - 9 = 0$ … kružnice.

b) Explicitní rovnice: $\boxed{y = f(x)}$, výraz na pravé straně závisí jen na x.

Ukázky: $y = 2x + 1 \ldots$ přímka,

$y = \sqrt{9 - x^2}$ … polokružnice.

c) Parametrická rovnice: $\boxed{x = x(t), y = y(t)}$ pro $\forall t \in [t_1; t_2]$, bod o souřadnicích $x(t), y(t)$ je bodem čáry a pro každý bod čáry $(x; y)$ existuje $t \in [t_1; t_2]$ takové, že jsou splněny rovnice: $x = x(t),\ y = y(t)$, kde t je parametr.

Ukázky: $x = t;\quad y = 2t + 1;\qquad \forall t \in (-\infty; \infty)$ … přímka,

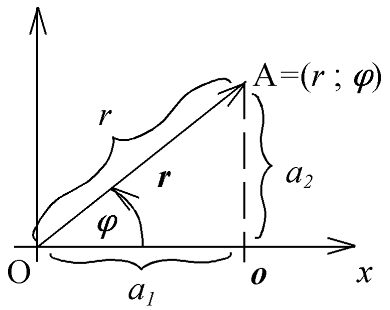
$x = 3\cos t;\qquad y = 3\sin t;\qquad \forall t \in [0; 2\pi]$ … kružnice.

d) Vektorová parametrická rovnice: $\boxed{\boldsymbol{r} = x(t) \cdot \boldsymbol{i} + y(t) \cdot \boldsymbol{j}}$. Bod $(x(t); y(t))$ je určen průvodičem $\boldsymbol{r}(t)$- vektorem.

Ukázky: $\boldsymbol{r} = t \cdot \boldsymbol{i} + (2t + 1) \cdot \boldsymbol{j}$ … přímka,

$\boldsymbol{r} = 3\cos t \cdot \boldsymbol{i} + 3\sin t \cdot \boldsymbol{j}$ … kružnice.

1.3 Polární souřadnice v E_2



Polární osa $\boldsymbol{o}$ … orientovaná polopřímka s počátečním bodem O.
Průvodič r … velikost vektoru $\boldsymbol{r}$, platí $|\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{OA}| = r$.
Amplituda φ … kladně orientovaný úhel, který je odchylkou polopřímek $\boldsymbol{o}$ a $\boldsymbol{OA}$.
Poloha každého bodu $\mathrm{A} = (r; \varphi)$ je jednoznačně určena polárními souřadnicemi:
$r, \varphi;\quad r \geq 0;\quad 0 \leq \varphi < 2\pi$.
V kartézských souřadnicích … $\mathrm{A} = (a_1; a_2)$.
V polárních souřadnicích … $\mathrm{A} = (r; \varphi)$.
Platí:

$$a_1 = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{i} = |\boldsymbol{r}| \cdot \cos\varphi = r\cos\varphi,$$

$$a_2 = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{j} = |\boldsymbol{r}| \cdot \sin\varphi = r\sin\varphi,$$

$$a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r^2,$$

$$r = \sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2}},$$

$$\varphi = \arccos\frac{a_1}{\sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2}}},$$

$$\varphi = \arcsin\frac{a_2}{\sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2}}}.$$

Příklad č. 2: Vyjádřete bod $A = \left(\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$ v polárních souřadnicích.

Řešení: $r = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$,

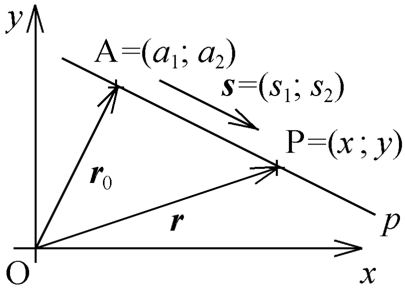
$$\varphi = \arccos \frac{a_1}{\sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4},$$

$$\varphi = \arcsin \frac{a_2}{\sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}} = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4},$$

Bod A má tyto polární souřadnice $A = \left(2; \frac{\pi}{4}\right)$.

1.4 Přímka v E_2

a) Přímka určená bodem A a směrovým vektorem *s*



$\boldsymbol{AP} = t \cdot \boldsymbol{s}$, $\quad \boldsymbol{r}_0 = (a_1; a_2)$, $\quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{OP} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{s}$.

Parametrický tvar: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{s}$,

$x = a_1 + ts_1$, pro $t \in (-\infty; \infty)$.

$y = a_2 + ts_2$,

Kanonický tvar: $t = \dfrac{x - a_1}{s_1} = \dfrac{y - a_2}{s_2} = t$.

$$\frac{x - a_1}{s_1} = \frac{y - a_2}{s_2} = t \Rightarrow y - a_2 = \frac{s_2}{s_1}(x - a_1),$$

$\dfrac{s_2}{s_1} = k = \tan\alpha$ … směrnice a $0 \le \alpha < \pi$.

Směrnicový tvar: $y - a_2 = k(x - a_1)$,

$$y - a_2 = \frac{s_2}{s_1}(x - a_1) \Rightarrow s_2 x - s_1 y - (s_2 a_1 - s_1 a_2) = 0.$$

Obecný tvar: $ax + by + c = 0$.

Příklad č. 3: Přímka je dána bodem $A(3, 5)$ a směrovým vektorem $\vec{s} = (1; -2)$. Napište její parametrický, kanonický, směrnicový a obecný tvar.

Řešení: Parametrický tvar: $x = 3 + t$, pro $t \in (-\infty; \infty)$.

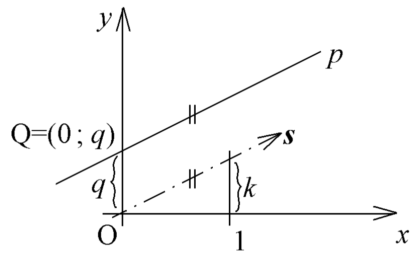
$y = 5 - 2t$,

Kanonický tvar: $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-5}{-2} = t \Rightarrow \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{5-y}{2}$.

Směrnicový tvar: $y - 5 = -2(x - 3) \Rightarrow y = -2x + 11$.

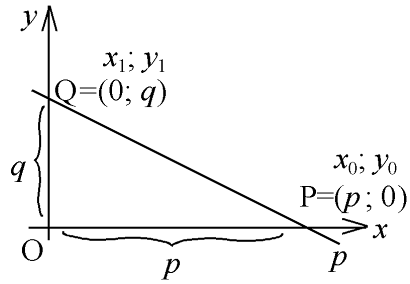
Obecný tvar: $-2x - y - (-6 - 5) = 0 \Rightarrow 2x + y - 11 = 0$.

b) Směrnicový tvar rovnice přímky dané bodem $Q = (0; q)$ a směrnicí *k*



$y - y_0 = k(x - x_0)$, $\quad y - q = kx \Rightarrow y = kx + q$; $\quad$ nesmí být rovnoběžná s osou *y*.

c) Úsekový tvar rovnice přímky určené dvěma body na osách $Q = (0; q)$, $P = (p; 0)$

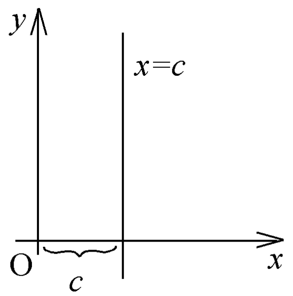


$y - y_0 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$, $\qquad y = \dfrac{q}{-p}(x - p) \Rightarrow -yp = xq - pq$,

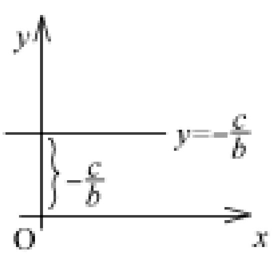
$xq + yp = pq \quad \Big| \cdot \dfrac{1}{pq} \quad \Rightarrow \dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} = 1$; $\quad$ nesmí procházet počátkem.

d) Přímky ve zvláštní poloze

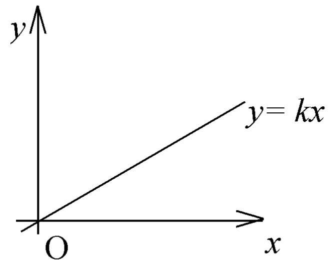
Obecný tvar: $ax + by + c = 0$,



Přímky rovnoběžné s osou *y*: $x = c \quad (a = 1, b = 0, c > 0)$.



Přímka rovnoběžná s osou *x*: $y = -\dfrac{c}{b} \quad (a = 0)$.

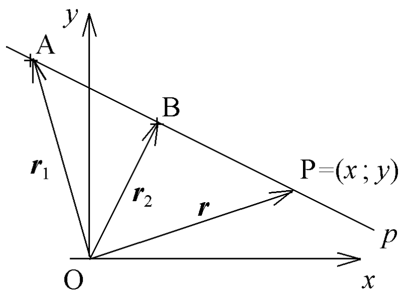


Přímka procházející počátkem: $y = kx$, $\left(k = -\frac{a}{b}, c = 0\right)$.

Osa x má rovnici: $y = 0$.

Osa y má rovnici: $x = 0$.

e) Přímka určená dvěma různými body $\mathrm{A} = (a_1; a_2), \mathrm{B} = (b_1; b_2)$



$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ je směrový vektor $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{AB} = (s_1; s_2)$;

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$,

$x = a_1 + t(b_1 - a_1)$, $\quad s_1 = b_1 - a_1$,

$y = a_2 + t(b_2 - a_2)$, $\quad s_2 = b_2 - a_2$.

Vyloučením parametru t: $t = \frac{x - a_1}{b_1 - a_{1\,1}} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2}$.

Výpočet směrnice k: $y - a_2 = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} \cdot (x - a_1) \Rightarrow \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = \frac{s_2}{s_1} = k$.

Obecná rovnice přímky: $ax + by + c = 0$,

$s_2 x - s_1 y - (s_2 a_1 - s_1 a_2) = 0$,

tedy $\boldsymbol{s}(-b\,; a)$ směrové parametry přímky p.

f) Tři body na přímce: $\mathrm{A} = (a_1; a_2), \mathrm{B} = (b_1; b_2), \mathrm{P} = (x; y)$

Podmínka, aby tři body ležely na jedné přímce:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ … rovnice přímky určené body A, B.

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$;

$x - a_1 = t(b_1 - a_1)$,

$x - a_2 = t(b_2 - a_2)$.

Řešení pro neznámou t existuje, jestliže det = 0.

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & b_1-a_1 \\ y-a_2 & b_2-a_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x-a_1 & b_1-a_1 & 1 \\ y-a_2 & b_2-a_2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Příklad č. 4: Přímka p je dána dvěma různými body $A=(2;5)$ a $B=(7;-2)$. Napište parametrický tvar, obecný tvar, směrnicový tvar, úsekový tvar a kanonický tvar přímky p a nalezněte chybějící souřadnici bodu $C=(4;?)$ tak, aby bod C ležel na přímce p.

Řešení: $\boldsymbol{AB} = B - A = (5;\ -7)$ je směrový vektor $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{AB} = (5;-7)$.

Parametrický tvar: $x = 2+5t$, pro $t \in (-\infty;\infty)$.

$y = 5-7t$,

Kanonický tvar: $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y-5}{-7} = t \Rightarrow \dfrac{x-2}{5} = \dfrac{5-y}{7}$.

Směrnicový tvar: $k = \dfrac{s_2}{s_1} = -\dfrac{7}{5}$, $y-a_2 = k\cdot(x-a_1) \Rightarrow y-5 = -\dfrac{7}{5}(x-2)$,

$y = -\dfrac{7}{5}x + \dfrac{39}{5}$.

Obecný tvar: normálový vektor přímky p

$\boldsymbol{n} = (7;\ 5) \Rightarrow 7x+5y+c=0 \Rightarrow 7x+5y-39=0$.

Úsekový tvar: $7x+5y=39 \Rightarrow \dfrac{7}{39}x + \dfrac{5}{39}y = 1 \Rightarrow \dfrac{x}{\frac{39}{7}} + \dfrac{y}{\frac{39}{5}} = 1$.

Bod $C=(4;?)$: $7x+5y-39=0 \Rightarrow 28+5y-39=0 \Rightarrow y = \dfrac{11}{5}$.

Bod $C = \left(4; \dfrac{11}{5}\right)$.

Příklad č. 5: Vyšetřete, zda body $A=(1;5)$, $B=(3;-5)$, $C=(2;0)$ leží na jedné přímce. Bodem A veďte přímku rovnoběžnou s osou x a bodem B veďte přímku rovnoběžnou s osou y.

Řešení:

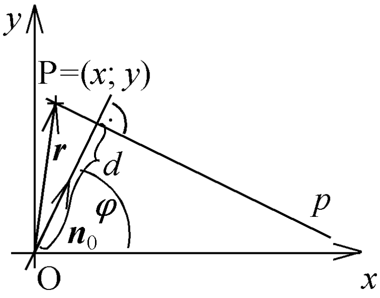
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -10 \end{vmatrix} = -10+10 = 0.$$

Body A, B, C leží na jedné přímce.

Přímka rovnoběžná s osou x a procházející bodem A má rovnici $y = 5$.

Přímka rovnoběžná s osou y a procházející bodem B má rovnici $x = 3$.

g) Normálová rovnice přímky



Bod $\mathrm{P} \in p$ a platí $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}_0 = d$,
$(x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j}) \cdot (\boldsymbol{i} \cos\varphi + \boldsymbol{j} \sin\varphi) - d = 0$,
$x\cos\varphi + y\sin\varphi - d = 0$.
Obecná rovnice přímky: $ax + by + c = 0$.
Existuje takové číslo ρ , že $\rho(ax + by + c) = x\cos\varphi + y\sin\varphi - d$,
$a\rho = \cos\varphi$; $b\rho = \sin\varphi$; $c\rho = -d$,
$\rho^2 = \dfrac{1}{a^2 + b^2} \Rightarrow \rho = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

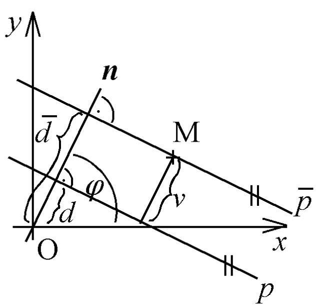
Obecnou rovnici napíšeme v normálovém tvaru: $\dfrac{ax + by + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$.

Protože $d > 0$, volíme znaménko tak, aby $\pm \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} < 0$; pro $c < 0$ $+$, pro $c > 0$ $-$.

Příklad č. 6: Napište obecnou rovnici přímky v normálovém tvaru, jestliže $d = 5$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

Řešení: $x\cos\dfrac{\pi}{3} + y\sin\dfrac{\pi}{3} - 5 = 0 \Rightarrow x\dfrac{1}{2} + y\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 5 = 0 \Rightarrow x + \sqrt{3}y - 10 = 0$.

1.5 Vzdálenost bodu $\mathrm{M} = (x_0; y_0)$ od přímky *p*



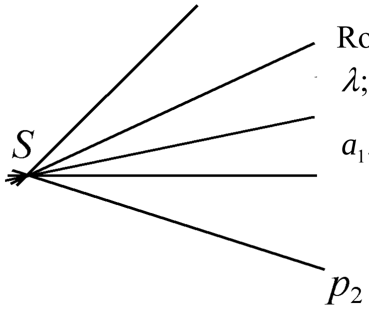
$p : x\cos\varphi + y\sin\varphi - d = 0$,
$\overline{p} : x\cos\varphi + y\sin\varphi - \overline{d} = 0$,
$\mathrm{M} \in \overline{p} \parallel p$; v: $\mathrm{M} \dashv p$; $v = \overline{d} - d$,

$d = x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi$ takže $v = x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi - d$; $v = \dfrac{ax_0 + by_0 + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Příklad č. 7: Vypočítejte vzdálenost bodu $\mathrm{N} = (3; 1)$ od přímky $4x - 3y + 6 = 0$.

Řešení: $p : \dfrac{4x - 3y + 6}{-5} = 0$ $v = -\dfrac{1}{5}(12 - 3 + 6) = -3$; O a N leží v téže polorovině určené přímkou *p*.
Vzdálenost bodu N od přímky *p* je 3 jednotky.

1.6 Svazek přímek



Rovnice svazku: $\lambda\, p_1 + \mu\, p_2 = 0$,
$\lambda; \mu$ jsou reálná čísla současně nerovná nule.

$$a_1x + b_1y + c_1 + \frac{\mu}{\lambda}\left(a_2x + b_2y + c_2\right) = 0,\ \lambda \neq 0.$$

Svazek přímek je množina všech přímek roviny incidentních s jedním bodem S (vrcholem svazku). Je určen libovolnou dvojicí základních přímek $p_1; p_2$.

Příklad č. 8: Přímkami $p_1 : 2x + y - 1 = 0;\ p_2 : x - y + 3 = 0$ je určen svazek přímek. Najděte vrchol svazku a rovnici přímky svazku, pro kterou platí $\lambda = 1; \mu = -1$.

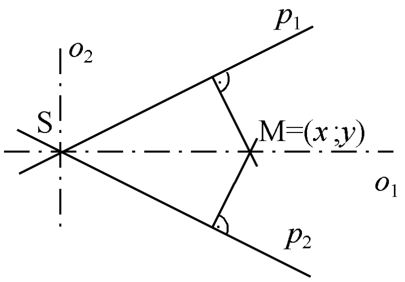
Řešení: $2x + y - 1 = -x + y - 3 \Rightarrow 3x + 2 = 0$.

S – vrchol svazku:

$$\begin{aligned} 2x + y - 1 &= 0, \\ x - y + 3 &= 0, \end{aligned} \qquad x = -\frac{2}{3}; y = \frac{7}{3}; \qquad \mathrm{S} = \left(-\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right).$$

Rovnice přímky svazku, pro kterou platí $\lambda = 1; \mu = -1$ je $3x + 2 = 0$, a vrchol svazku $\mathrm{S} = \left(-\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

Příklad č. 9: Najděte osu souměrnosti přímek $13x - 6y - 24 = 0;\ 14y + 3y + 28 = 0$.



Řešení:

a) Obecně: $p_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0; \qquad p_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Osa souměrnosti je tvořena body $(x; y)$, které mají od přímek $p_1; p_2$ stejné vzdálenosti. $o : \dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{\pm\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \pm \dfrac{a_2x + b_2y + c_2}{\pm\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = 0$.

b) Konkrétně: $\dfrac{13x - 6y - 24}{\sqrt{169 + 36}} \pm \dfrac{14x + 3y + 28}{\sqrt{196 + 9}} = 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{205}}\left(13x \pm 14x - 6y \pm 3y - 24 \pm 28\right) = 0,$$

$$x + 9y + 52 = 0,$$

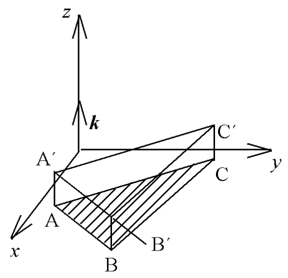
$$27x - 3y + 4 = 0,$$

$$y = -\frac{x}{9} - \frac{52}{9},$$

$$y = 9x + \frac{4}{3}.$$

1.7 Obsah trojúhelníka ABC

Trojúhelník je zadaný třemi různými nekolineárními body $\mathrm{A} = (a_1; a_2); \mathrm{B} = (b_1; b_2); C = (c_1; c_2)$. V E^3: $\mathrm{A} = (a_1; a_2; 0); \mathrm{B} = (b_1; b_2; 0); \mathrm{C} = (c_1; c_2; 0)$.



Jednotkový souřadnicový vektor $\boldsymbol{k} = (0; 0; 1)$,
$\boldsymbol{AB} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2; 0)$,
$\boldsymbol{AC} = (c_1 - a_1; c_2 - a_2; 0)$.

Objem hranolu ABCA′B′C′ o výšce $|\boldsymbol{k}| = 1$ je roven obsahu trojúhelníka ABC.
Objem hranolu:

$$V = \frac{1}{2}\left|[\boldsymbol{k} \quad \boldsymbol{AB} \quad \boldsymbol{AC}]\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & 0 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & 0 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & 1 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & 1 \end{matrix}\right\| =$$

$$\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{matrix}\right\| = P_{\Delta\mathrm{ABC}}$$

Příklad č. 10: Určete třetí vrchol trojúhelníka, jestliže jsou dány jeho vrcholy $\mathrm{A} = (4; 3); \mathrm{B} = (6; -3)$, obsah $P = 21$ a třetí vrchol C leží na ose *x*.

Řešení:

$$P = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{matrix}\right\| \Rightarrow \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 4 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & 1 \\ c_1 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| = 21.$$

Bod, který leží na ose *x* má $c_2 = 0$.

$$\frac{1}{2}(-12 + 0 + 3c_1 + 3c_1 - 18 - 0) = 21,$$

$$\frac{1}{2}(-30 + 6c_1) = 21,$$

$$-15 + 3c_1 = 21,$$

$$3c_1 = 36,$$

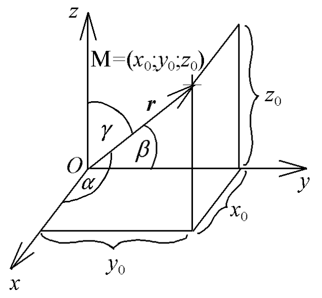
$$c_1 = 12.$$

Třetí vrchol trojúhelníka $\mathrm{C} = (12; 0)$.

2 Analytická geometrie lineárních útvarů v prostoru E_3

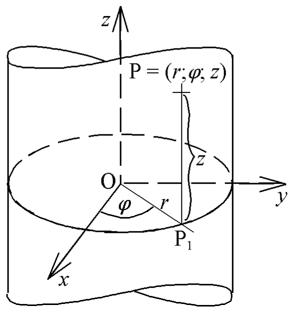
2.1 Pravoúhlá kartézská ortonormální soustava souřadnic

Kladně orientovaný (pravotočivý) souřadnicový systém:



$$\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{r} = (x_0; y_0; z_0) \equiv x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j} + z_0\boldsymbol{k}\,,$$
$$\sphericalangle\, \boldsymbol{r}\,\boldsymbol{i} = \alpha; \qquad \sphericalangle\, \boldsymbol{r}\,\boldsymbol{j} = \beta; \qquad \sphericalangle\, \boldsymbol{r}\,\boldsymbol{k} = \gamma\,,$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1\,.$$

2.2 Semipolární neboli cylindrické souřadnice



$$P = (r; \varphi; z);$$
$$r \geq 0,$$
$$0 \leq \varphi < 2\pi,$$
$$-\infty < z < \infty.$$

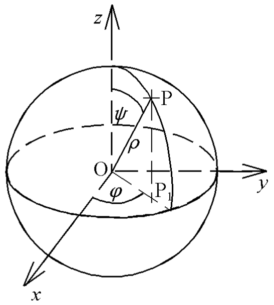
Kartézské a přidružené cylindrické souřadnice libovolného bodu P jsou, jak plyne z rovnic, vázány vztahy:

$$x = r \cdot \cos\varphi\,, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

$$y = r \cdot \sin\varphi\,, \qquad \varphi = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x} = \arcsin\dfrac{y}{r} = \arccos\dfrac{x}{r} & \text{pro } y \geq 0, \\ 2\pi - \arccos\dfrac{x}{r} & \text{pro } y < 0. \end{cases}$$

$$z = z\,.$$

2.3 Prostorové polární neboli sférické souřadnice



$P = (\varphi; \psi; \rho)$,

$\varphi = \sphericalangle\, x, \boldsymbol{OP}_1, \quad 0 \le \varphi < 2\pi$,

$\psi = \sphericalangle\, z, \boldsymbol{OP}, \quad 0 < \psi < \pi$,

$\rho = |\boldsymbol{OP}|, \quad \rho \ge 0$.

$x = \rho \cdot \cos\varphi \cdot \sin\psi,$

$y = \rho \cdot \sin\varphi \cdot \sin\psi,$

$z = \rho \cdot \cos\psi.$

Vyjádříme-li odtud souřadnice ρ, φ, ψ pomocí x, y, z dostaneme tyto převodní vztahy (transformační rovnice) mezi kartézskými a přidruženými sférickými souřadnicemi téhož bodu:

$x = \rho \cdot \cos\varphi \cdot \sin\psi, \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$

$y = \rho \cdot \sin\varphi \cdot \sin\psi, \qquad \psi = \arccos\dfrac{z}{\rho},$

$$z = \rho \cdot \cos\psi, \qquad \varphi = \begin{cases} \arccos\dfrac{x}{\sqrt{\rho^2 - z^2}} & \text{pro } y \ge 0, \\ 2\pi - \arccos\dfrac{x}{\sqrt{\rho^2 - z^2}} & \text{pro } y < 0. \end{cases}$$

2.4 Rovnice plochy a prostorové čáry

Implicitní rovnice plochy: $F(x, y, z) = 0$.

Explicitní rovnice plochy: $z = \varphi(x, y)$.

Parametrické rovnice plochy: $x = x(u, v); \quad y = y(u, v); \quad z = z(u, v)$.

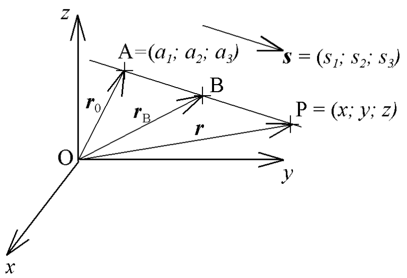
Vektorová rovnice plochy: $\boldsymbol{r}(u, v) = x(u, v)\,\boldsymbol{i} + y(u, v)\,\boldsymbol{j} + z(u, v)\,\boldsymbol{k}$.

Vektorová rovnice prostorové čáry: $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k}$.

Prostorová čára může být určena jako průsečnice dvou ploch $(F_1(x, y, z) = 0;\ F_2(x, y, z) = 0)$.

2.5 Vektorová rovnice přímky

Přímka je určena bodem A a směrem $\boldsymbol{s}$.



$$\boldsymbol{AP} = t \cdot \boldsymbol{s},$$
$$\mathrm{A} = (a_1; a_2; a_3);\ \mathrm{B} = (b_1; b_2; b_3);\ \boldsymbol{r}_0 = (a_1; a_2; a_3);$$
$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + t \cdot \boldsymbol{s}\,.$$

Parametrické rovnice přímky: $\begin{cases} x = a_1 + ts_1 \\ y = a_2 + ts_2 \\ z = a_3 + ts_3 \end{cases}$, $t \in \mathrm{R}$.

Jestliže je přímka určena dvěma různými body A, B.

$\boldsymbol{AB} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2; b_3 - a_3)$,

$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + t \cdot \boldsymbol{AB}$.

Parametrické rovnice: $\begin{cases} x = a_1 + t(b_1 - a_1) \\ y = a_2 + t(b_2 - a_2) \\ z = a_3 + t(b_3 - a_3) \end{cases}$, $t \in \mathrm{R}$.

Příklad č. 1: Přímka je dána body $\mathrm{A} = (-1; 3; 2)$ a $\mathrm{B} = (2; -1; 3)$. Napište její parametrické rovnice.

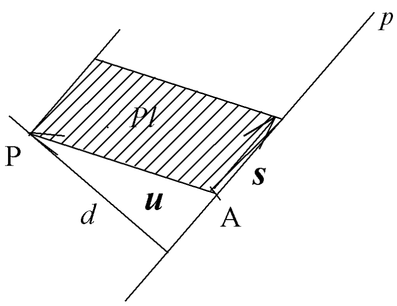
Řešení:

$$\begin{aligned} x &= -1 + t\,(2+1), \\ y &= \ \ 3 + t\,(-1-3), \qquad t \in \mathrm{R}. \\ z &= \ \ 2 + t\,(3-2), \end{aligned}$$

Parametrické rovnice přímky jsou: $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = \ \ 3 - 4t \\ z = \ \ \ 2 + \ t \end{cases}$, $t \in \mathrm{R}$.

2.6 Vzdálenost bodu od přímky

Vzdálenost d bodu $\mathrm{P} = (x_0; y_0; z_0)$ od přímky $p : (A, \boldsymbol{s})$, kde $\mathrm{A} = (a_1; a_2; a_3)$, $\boldsymbol{s} = (s_1; s_2; s_3)$.

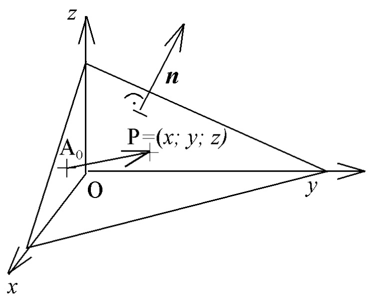


$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AP} = (x_0 - a_1; y_0 - a_2; z_0 - a_3),$$
$$d = \frac{\left\| \begin{matrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_0 - a_1 & y_0 - a_2 & z_0 - a_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{matrix} \right\|}{\sqrt{s_1^{\,2} + s_2^{\,2} + s_3^{\,2}}}.$$

Plocha rovnoběžníka $Pl = |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{s}| = |\boldsymbol{s}| \cdot d \ \Rightarrow \boxed{d = \dfrac{|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}}$.

2.7 Rovina v prostoru E_3

Rovina je určena bodem $A_0 = (x_0; y_0; z_0)$ a normálou $\boldsymbol{n} = (a; b; c)$.



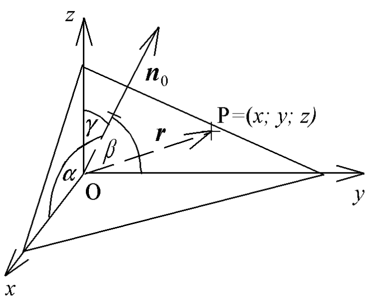
$P = (x; y; z)$ je libovolný bod roviny;
$\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{A_0P}$.

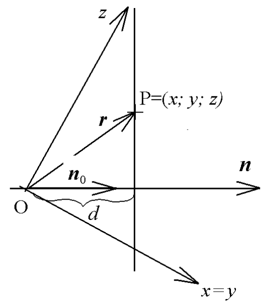
Skalární součin: $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{A_0P} = 0 \;\Rightarrow\; a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

Obecná rovnice roviny $\boxed{ax + by + cz + d = 0}$.

Přitom $\boldsymbol{A_0P} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ a $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

2.8 Normálový tvar rovnice roviny





$\alpha = \sphericalangle \boldsymbol{n}, x$; $\beta = \sphericalangle \boldsymbol{n}, y$; $\gamma = \sphericalangle \boldsymbol{n}, z$;

$\boldsymbol{n}_0 = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta + \boldsymbol{k}\cos\gamma$, $\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}$,

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OP}$, bod P je libovolný bod roviny, $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}_0 = d$,

$\boldsymbol{n}_0$ je jednotkový normálový vektor;

d je průmět vektoru $\boldsymbol{r}$ do směru normálového vektoru $\boldsymbol{n}_0$, tj. vzdálenost počátku O od roviny

$(x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k})(\boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta + \boldsymbol{k}\cos\gamma) = d \;\Rightarrow\; x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - d = 0$.

Z obecné rovnice roviny dostaneme normálový: $\pm \dfrac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$;

$\pm$ podle volby orientace $\boldsymbol{n}_0$.

Příklad č. 2: Rovina je určena bodem $P = (4; 3; 1)$ a normálou $\boldsymbol{n} = (3; 2; -6)$. Určete její vzdálenost od počátku.

Řešení:

$3(x - 4) + 2(y - 3) - 6(z - 1) = 0$,

$\dfrac{3x + 2y - 6z - 12}{\sqrt{9 + 4 + 36}} = 0$,

$\dfrac{3}{7}x + \dfrac{2}{7}y - \dfrac{6}{7}z - \dfrac{12}{7} = 0$, $\quad d = \dfrac{12}{7}$.

Vzdálenost zadané roviny od počátku je $\dfrac{12}{7}$.

2.9 Vzdálenost dvou rovin

Jestliže máme dány dvě roviny $\rho_1 \parallel \rho_2$ v normálovém tvaru, pak

$\rho_1 :\ x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - d_1 = 0$,

$\rho_2 :\ x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - d_2 = 0$,

a vzdálenost těchto dvou rovin $d = |d_2 - d_1|$.

Příklad č. 3: Jsou dány roviny $\rho_1 :\ 2x - 3y + 6z + 3 = 0$, $\rho_2 : 2x - 3y + 6z - 11 = 0$. Určete jejich vzdálenost.

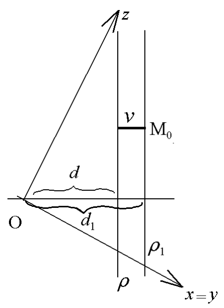
Řešení: $\pm\sqrt{4+9+36} = \pm 7$,

$$d_1 = -\frac{3}{7}, \quad d_2 = \frac{11}{7}, \quad d = \left|\frac{11}{7} + \frac{3}{7}\right| = 2.$$

Vzdálenost zadaných dvou rovin je 2 jednotky.

2.10 Vzdálenost bodu od roviny

Je dán bod $\mathrm{M}_0 = (x_0; y_0; z_0)$ od roviny $\rho :\ x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - d = 0$.



$\rho_1 :\ x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - d_1 = 0$,

$d_1 = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma$,

$v = |d_1 - d| = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - d|$.

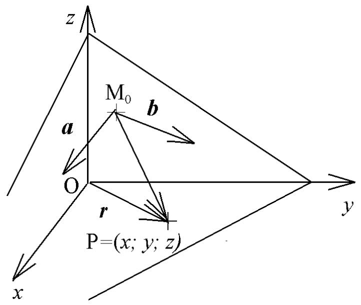
Příklad č. 4: Určete vzdálenost v bodu $\mathrm{P}_0 = (4; 3; 1)$ od roviny $\rho :\ 2x - 3y - 6z - 7 = 0$.

Řešení:
$$v = \left|\frac{2\cdot 4 - 3\cdot 3 - 6\cdot 1 - 7}{\sqrt{4+9+36}}\right| = \left|\frac{8-9-6-7}{7}\right| = 2.$$

Vzdálenost bodu P_0 od roviny ρ je 2 jednotky.

2.11 Vektorový tvar rovnice roviny

Rovina je určena bodem $\mathrm{M}_0 = (x_0; y_0; z_0)$ a dvěma vektory $\boldsymbol{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1; b_2; b_3)$ (tzv. zaměřením).



$\boldsymbol{M_0P} = u\,\boldsymbol{a} + v\,\boldsymbol{b}$,

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OP}, \qquad \boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{OM}_0$,

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + u\,\boldsymbol{a} + v\,\boldsymbol{b}$.

Parametrické rovnice roviny: $\begin{cases} x = x_0 + ua_1 + vb_1 \\ y = y_0 + ua_2 + vb_2 \\ z = z_0 + ua_3 + vb_3 \end{cases}$ $\quad u, v \in \mathrm{R}$.

Vyloučením parametrů u, v

$t(x - x_0) + ua_1 + vb_1 = 0$ …. , aby měly tři rovnice řešení, musí být determinant roven nule, tedy

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Jestliže je rovina určena třemi různými body A, B, C, které neleží v jedné přímce, pak $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{a}; \boldsymbol{AC} = \boldsymbol{b}$ a musí platit:

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Příklad č. 5: Rovina je určena body $\mathrm{A} = (3; 2; 1);\ \mathrm{B} = (1; -3; 4);\ \mathrm{C} = (-2; 1; 3)$. Napište parametrické rovnice a obecnou rovnici této roviny.

Řešení: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{AB} = (-2; -5; 3);\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{AC} = (-5; -1; 2)$.

Parametrické rovnice: $\begin{cases} x = 3 - 2u - 5v \\ y = 2 - 5u - v \\ z = 1 + 3u + 2v \end{cases}$ $\quad u, v \in \mathrm{R}$.

Obecnou rovnici roviny získáme například vyloučením parametrů u, v.

Z druhé rovnice $v = 2 - 5u - y$ a po dosazení

$x = 3 - 2u - 5(2 - 5u - y)$,

$z = 1 + 3u + 2(2 - 5u - y)$.

Po úpravě: $x - 5y - 23u + 7 = 0$,

$z + 2y + 7u - 5 = 0$.

Vynásobíme-li první rovnici číslem 7 , druhou číslem 23 a sečteme-li je, dostaneme obecnou rovnici roviny $7x + 11y + 23z - 66 = 0$.

Jiné řešení:

$$\begin{vmatrix} x - 3 & y - 2 & z - 1 \\ 1 - 3 & -3 - 2 & 4 - 1 \\ -2 - 3 & 1 - 2 & 3 - 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - 3 & y - 2 & z - 1 \\ -2 & -5 & 3 \\ -5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

$-10(x - 3) + 2(z - 1) - 15(y - 2) - 25(z - 1) + 3(x - 3) + 4(y - 2) = 0$,

$-7(x - 3) - 23(z - 1) - 11(y - 2) = 0$,

$-7x + 21 - 23z + 23 - 11y + 22 = 0$,

$7x + 11y + 23z - 66 = 0$.

Zadaná rovnice má obecnou rovnici $7x + 11y + 23z - 66 = 0$ a její parametrické rovnice jsou:

$x = 3 - 2u - 5v,$

$y = 2 - 5u - v, \qquad u, v \in \mathrm{R}$.

$z = 1 + 3u + 2v,$

Příklad č. 6: Vypočtěte vzdálenost bodu $\mathrm{M} = (m_1; m_2; m_3)$ od roviny určené body : $\mathrm{A} = (a_1; a_2; a_3),\ \mathrm{B} = (b_1; b_2; b_3),\ \mathrm{C} = (c_1; c_2; c_3)$.

Řešení: Objem čtyřstěnu ABCD je

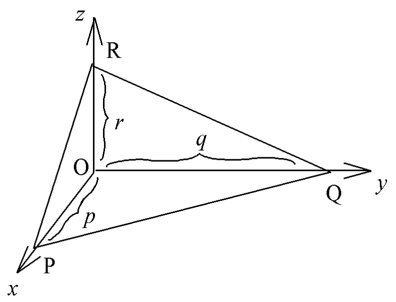
$$\frac{1}{2}\left|\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{AC}\right|\cdot\frac{v}{3}=\frac{1}{6}\left|\left[\boldsymbol{AB}\ \boldsymbol{AC}\ \ \boldsymbol{AM}\right]\right| \Rightarrow v=\frac{\left|\left[\boldsymbol{AB}\ \boldsymbol{AC}\ \ \boldsymbol{AM}\right]\right|}{\left|\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{AC}\right|}.$$

Platí: $P_{\Delta\mathrm{ABC}}=\frac{1}{2}\left|\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{AC}\right|$. Objem čtyřstěnu ABCM = $\frac{1}{6}\left|\left[\boldsymbol{AB}\ \ \boldsymbol{AC}\ \ \boldsymbol{AM}\right]\right|$.

Vzdálenost bodu M od roviny je rovna výšce v čtyřstěnu ABCM.

2.12 Úsekový tvar rovnice roviny

Rovina prochází body P, Q, R na souřadnicových osách.
Tedy $\mathrm{P}=(p;0;0)$, $\mathrm{Q}=(0;q;0)$, $\mathrm{R}=(0;0;r)$.



$\boldsymbol{PQ}=(-p;q;0)$, $\boldsymbol{PR}=(-p;0;r)$.

Rovina bude určena bodem P a dvěma vektory: $\boldsymbol{PQ}$ a $\boldsymbol{PR}$.

$$\begin{vmatrix} x-p & y & z \\ -p & q & 0 \\ -p & 0 & r \end{vmatrix}=0 \Rightarrow xqr+ypr+zpq-pqr=0 \Rightarrow \boxed{\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1}.$$

Rovina nesmí procházet počátkem.

2.13 Zvláštní polohy rovin

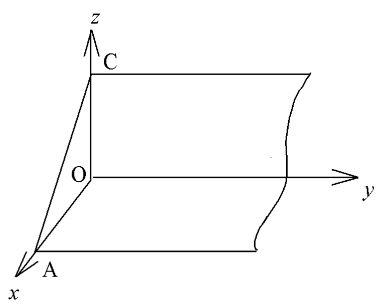
a) Souřadnicové roviny:

Rovina xy má rovnici $z = 0$.
Rovina yz má rovnici $x = 0$.
Rovina xz má rovnici $y = 0$.

b) Roviny rovnoběžné se souřadnicovými rovinami:

Roviny rovnoběžné s rovinou xy mají rovnice $z = c$, kde $c \neq 0$.
Roviny rovnoběžné s rovinou yz mají rovnice $x = a$, kde $a \neq 0$.
Roviny rovnoběžné s rovinou xz mají rovnice $y = b$, kde $b \neq 0$.

c) Roviny rovnoběžné se souřadnicovými osami:

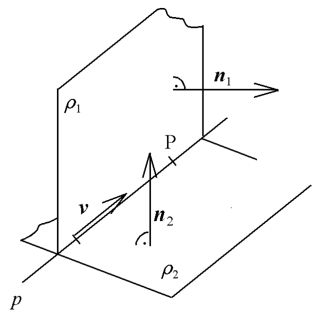


Rovina rovnoběžná s osou y má rovnici $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1$.

Rovina rovnoběžná s osou x má rovnici $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Rovina rovnoběžná s osou z má rovnici $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

2.14 Přímka jako průsečnice dvou rovin



Různoběžné roviny ρ_1, ρ_2 určují průsečnici p

$$p: \begin{cases} \rho_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ \rho_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$$

Směr $\boldsymbol{v}$ přímky p dostaneme $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2$ takže: $\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, dále stačí určit jeden libovolný bod P ležící v obou rovinách $\rho_1 \cap \rho_2$.

Příklad č. 7: Přímka p je určena rovnicemi $2x - y + z - 1 = 0, x + 3y - z + 2 = 0$. Napište ji v parametrickém tvaru.

Řešení: $\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2\,\boldsymbol{i} + 3\,\boldsymbol{j} + 7\,\boldsymbol{k}$.

Pro $x = 0$ platí:

$$\begin{aligned} -y + z &= 1 \\ 3y - z &= -2 \end{aligned}$$

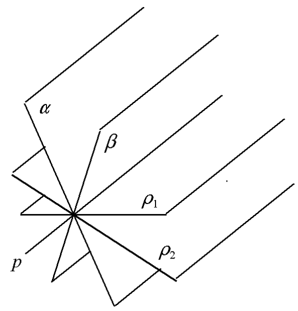
$$y = -\frac{1}{2};\quad z = \frac{1}{2}.$$

Přímka p má parametrické rovnice: $p: x = -2t$,

$$y = -\frac{1}{2} + 3t, \qquad t \in \mathrm{R}.$$

$$z = \frac{1}{2} + 7t,$$

2.15 Svazek rovin v E_3



Svazek rovin je soustava rovin procházejících přímkou $\boldsymbol{p}$ – **osou svazku**, která je určena dvěma rovinami svazku $p = \alpha \cdot \beta$; $\alpha: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0; \beta: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$.
Každá rovnice roviny svazku (ρ_1, ρ_2) má tvar:
$\lambda(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$; λ, μ …jsou parametry, pro které platí: $\lambda^2 + \mu^2 > 0$.

Příklad č. 8: Napište rovnici roviny ρ, která prochází bodem $B = (3; 2; 1)$ a patří svazku určeném rovinami α: $3x - y + z - 1 = 0$, β: $x + 2y + 2z + 5 = 0$.

Řešení: Rovnice svazku $\lambda(3x - y + z - 1) + \mu(x + 2y + 2z + 5) = 0$. Bod B náleží rovině ρ.

$\lambda(3 \cdot 3 - 2 + 1 - 1) + \mu(3 + 2 \cdot 2 + 2 + 5) = 0$,

$7\lambda + 14\mu = 0$,

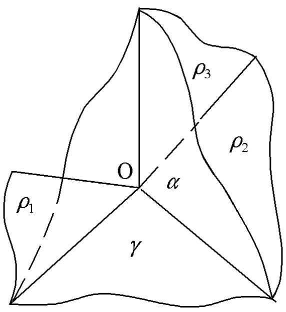
$7\lambda = -14\mu$,

$\frac{\lambda}{\mu} = -2 \quad \Rightarrow$ když $\mu = 1; \lambda = -2$,

$-2(3x - y + z - 1) + (x + 2y + 2z + 5) = 0$.

Rovnice roviny ρ je $5x - 4y - 7 = 0$.

2.16 Trs rovin v E_3



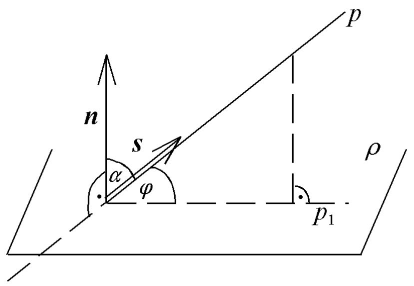
Trs rovin je soustava rovin (alespoň tří), z nichž žádné tři nepatří témuž svazku a všechny procházejí bodem **O … středem trsu**. $O = \alpha \cap \beta \cap \gamma$; λ, μ, ν … jsou parametry. Nepatří-li roviny $\alpha: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0; \beta: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0; \gamma: a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$ svazku rovin a žádné dvě nejsou rovnoběžné, pak určují bod O – střed trsu.

Rovnice trsu rovin: $\lambda(\alpha) + \mu(\beta) + \nu(\gamma) = 0$; $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 > 0$;

$\lambda(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) + \nu(a_3x + b_3y + c_3z + d_3) = 0$.

Poznámka: Souřadnicové roviny $x = 0; y = 0; z = 0$ tvoří trs se středem v počátku. Každá rovina určená rovnicí: $ax + by + cz = 0$ je rovinou trsu o středu O.

2.17 Úhel (odchylka) přímky od roviny



Úhel (odchylka) přímky p: $\boldsymbol{s} = (s_1; s_2; s_3)$ od roviny ρ: $ax + by + cz + d = 0$ je úhel φ, který svírá přímka p (její směr $\boldsymbol{s}$) se svým pravoúhlým průmětem p_1 do roviny ρ ; tj. určíme úhel α přímky p s libovolnou normálou $\boldsymbol{n}$ roviny ρ.

Úhel $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$; $\qquad \boldsymbol{n} = a\,\boldsymbol{i} + b\,\boldsymbol{j} + c\,\boldsymbol{k}$;

$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{s} = |\boldsymbol{n}| \cdot |\boldsymbol{s}| \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{n}| \cdot |\boldsymbol{s}|}$;

$$\sin\varphi = \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{n}| \cdot |\boldsymbol{s}|} = \frac{as_1 + bs_2 + cs_3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,\sqrt{s_1^{\,2} + s_2^{\,2} + s_3^{\,2}}} \Rightarrow \varphi = \arcsin\frac{|as_1 + bs_2 + cs_3|}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(s_1^{\,2} + s_2^{\,2} + s_3^{\,2})}}.$$

Příklad č. 9: Vypočítejte odchylku přímky $p: y = 3x - 1, 2z = -3x + 2$ od roviny $\rho: 2x + y + z - 4 = 0$.

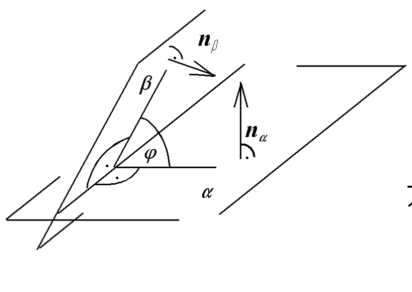
Řešení:

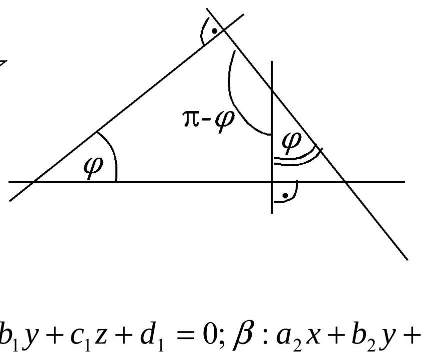
$$\boldsymbol{s} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2\,\boldsymbol{i} + 6\,\boldsymbol{j} - 3\,\boldsymbol{k}$$ směrový vektor přímky p,

$$\sin\varphi = \frac{4 + 6 - 3}{\sqrt{4 + 1 + 1}\sqrt{4 + 36 + 9}} = \frac{7}{7\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow \varphi = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Odchylka přímky p od roviny ρ je $\varphi = \arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

2.18 Úhel (odchylka) dvou rovin





Úhel (odchylka) dvou rovin $\alpha: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0; \beta: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ je úhel φ, který svírají normály těchto rovin.

$\boldsymbol{n}_\alpha = (a_1; b_1; c_1)$; $\boldsymbol{n}_\beta = (a_2; b_2; c_2)$;

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{n}_\alpha \cdot \boldsymbol{n}_\beta|}{|\boldsymbol{n}_\alpha| \cdot |\boldsymbol{n}_\beta|} = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)}}.$$

Příklad č. 10: Určete úhel φ rovin $5x + y - z - 13 = 0$ a $x - 8y - 3z + 4 = 0$.

Řešení: $\boldsymbol{n}_1 = (5; 1; -1)$; $\boldsymbol{n}_2 = (1; -8; -3)$,

$$\cos\varphi = \frac{5 - 8 + 3}{\sqrt{25+1+1}\sqrt{1+64+9}} = 0.$$

Roviny jsou k sobě kolmé.

3 Analytická geometrie kvadratických útvarů v rovině E_2

3.1 Obecná rovnice druhého stupně

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

vyjadřuje křivku druhého stupně, tj. **kuželosečku**.

Maticový tvar rovnice kuželosečky:

$$[x \;\; y \;\; 1] \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \,, \qquad (a_{ij} = a_{ji});$$

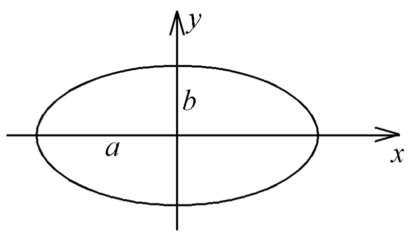
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \equiv$ **matice kuželosečky**

Kuželosečky:
1) Regulární: elipsa (kružnice)
   hyperbola
   parabola
2) Singulární: dvojice přímek: různoběžných
   rovnoběžných (splývajících)
   imaginárních.

Ukázky:

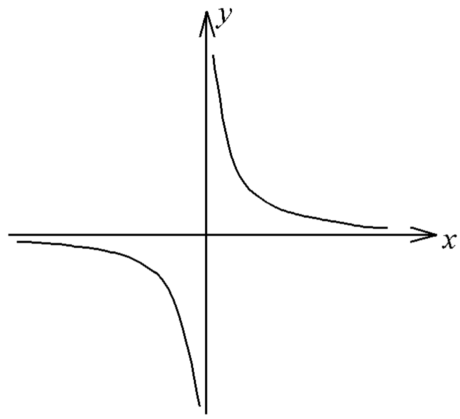
Středový tvar elipsy s osami v souřadnicových osách: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Rovnice $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$.



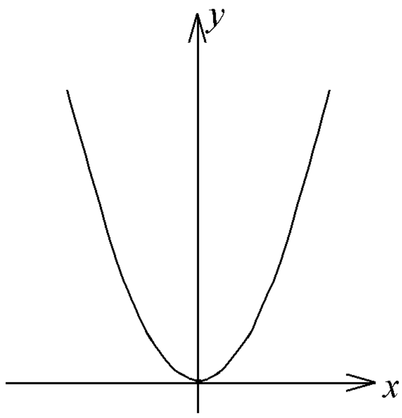
Rovnoosá hyperbola s asymptotami v souřadnicových osách: $y = \dfrac{1}{x}$.

Rovnice $xy = 1$; $\qquad xy - 1 = 0$.

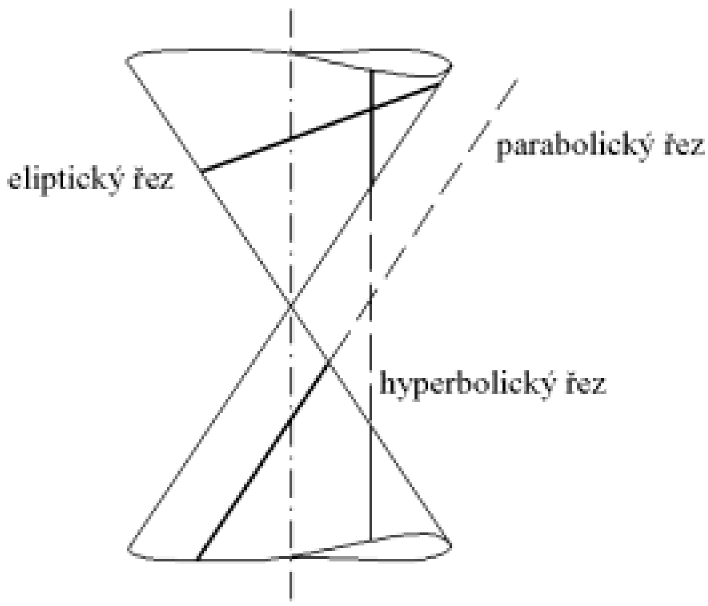


Parabola s hlavní osou v souřadnicové ose y a s vrcholem v počátku, orientovaná v kladném smyslu osy y: $y = x^2$.

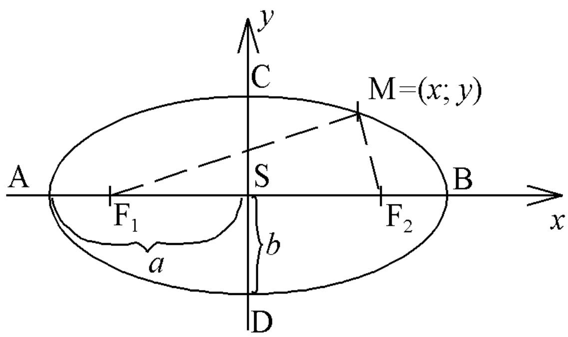
Rovnice $x^2 - y = 0$.



Kuželová plocha



3.2 Elipsa



Platí: $\left|F_1M\right| + \left|MF_2\right| = 2a$, $\qquad e^2 = a^2 - b^2$,

$\left|F_1M\right| = \sqrt{(e+x)^2 + y^2}$, $\qquad \left|F_2M\right| = \sqrt{(e-x)^2 + y^2}$,

$\sqrt{(e+x)^2 + y^2} + \sqrt{(e-x)^2 + y^2} = 2a$,

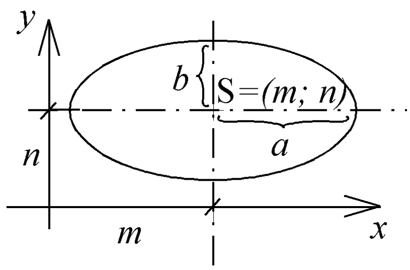
$b^2x + a^2y = a^2b^2$.

A, B	hlavní vrcholy;	$\lvert \mathrm{AS} \rvert = \lvert \mathrm{SB} \rvert$	hlavní poloosa	$= a$;
C, D	vedlejší vrcholy;	$\lvert \mathrm{CS} \rvert = \lvert \mathrm{SD} \rvert$	vedlejší poloosa	$= b$;
F_1, F_2	ohniska;	$\lvert \mathrm{SF}_1 \rvert = \lvert \mathrm{SF}_2 \rvert$	excentricita	$= e$;

$\left|\mathrm{CF}_1\right| = \left|\mathrm{CF}_2\right| = a$.

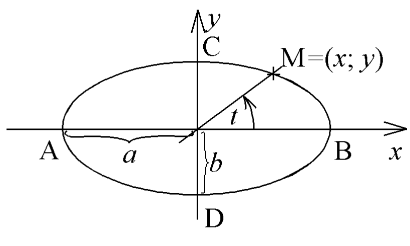
Středový tvar rovnice elipsy v kanonickém tvaru: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Normální tvar rovnice elipsy: $\dfrac{(x-m)^2}{a^2} + \dfrac{(y-n)^2}{b^2} = 1$.



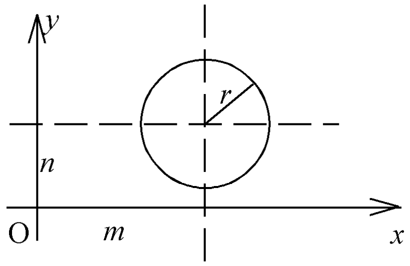
Parametrické rovnice elipsy: $x = a \cdot \cos t$; $\qquad y = b \cdot \sin t$; $\qquad t \in [0;2\pi)$

$x = m + a \cdot \cos t$;. $\qquad y = n + b \cdot \sin t$; $\qquad t \in [0;2\pi)$



Normální tvar rovnice elipsy je charakterizován tím, že osy elipsy jsou rovnoběžné s osami souřadnic.

3.3 Kružnice:



$a = b = r;\qquad x^2 + y^2 = r^2;$

$x = r \cdot \cos t;\qquad y = r \cdot \sin t;\qquad t \in [0;2\pi).$

$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2;\qquad x = m + r \cdot \cos t;\qquad y = n + r \cdot \sin t;\qquad t \in [0;2\pi).$

Příklad č. 1: Je dána obecná rovnice elipsy $16x^2 + 9y^2 - 40x + 6y + 25 = 0$. Určete její polohu, velikost hlavní a vedlejší poloosy, velikost excentricity, souřadnice středu, hlavních a vedlejších vrcholů a obou ohnisek. Napište její parametrické rovnice.

Řešení:

$$16x^2 + 9y^2 - 40x + 6y + 25 = 0$$

$$16\left(x^2 - \frac{40}{16}x\right) + 9\left(y^2 + \frac{6}{9}y\right) = -25$$

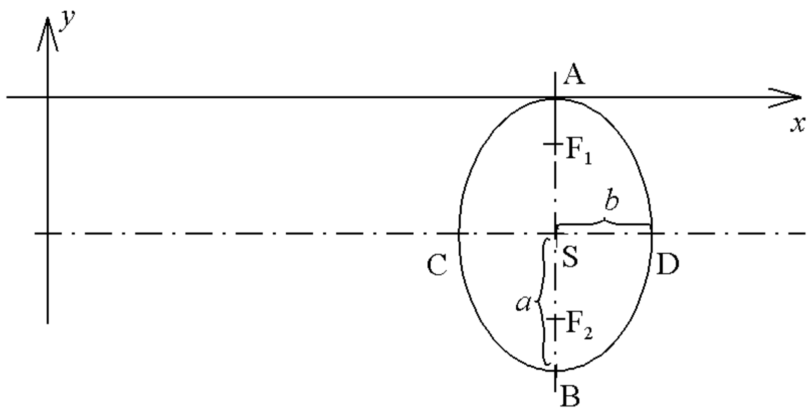
$$16\left(x^2 - \frac{5}{2}x\right) + 9\left(y^2 + \frac{2}{3}y\right) = -25$$

$$16\left[\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right] + 9\left[\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right] = -25$$

$$16\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + 9\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = -25 + 25 + 1$$

$$\frac{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2}{\frac{1}{16}} + \frac{\left(y + \frac{1}{3}\right)^2}{\frac{1}{9}} = 1$$

$$e^2 = a^2 - b^2 \quad \Rightarrow \quad e^2 = \frac{1}{9} - \frac{1}{16} = \frac{16-9}{144} = \frac{7}{144} \quad \Rightarrow \quad e = \frac{\sqrt{7}}{12}$$



Elipsa má hlavní osu rovnoběžnou se souřadnicovou osou *y*.

Hlavní poloosa má velikost $a = \frac{1}{3}$.

Vedlejší poloosa má velikost $b = \frac{1}{4}$.

Excentricita má velikost $e = \frac{\sqrt{7}}{12}$.

Střed elipsy má souřadnice: $\mathrm{S} = \left(\frac{5}{4}; -\frac{1}{3}\right)$.

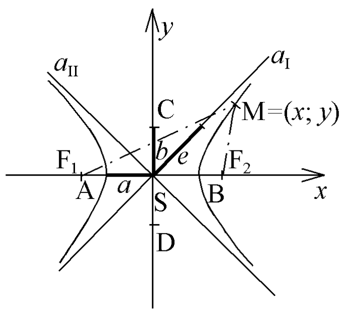
Hlavní vrcholy mají souřadnice: $\mathrm{A} = \left(\frac{5}{4}; 0\right)$; $\quad \mathrm{B} = \left(\frac{5}{4}; -\frac{2}{3}\right)$.

Vedlejší vrcholy mají souřadnice: $\mathrm{C} = \left(1; -\frac{1}{3}\right)$; $\quad \mathrm{B} = \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{3}\right)$.

Ohniska mají souřadnice: $\mathrm{F}_1 = \left(\frac{5}{4}; -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{7}}{12}\right)$; $\quad \mathrm{F}_2 = \left(\frac{5}{4}; -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{7}}{12}\right)$.

Parametrické rovnice elipsy jsou: $x = \frac{5}{4} + \frac{1}{3} \cdot \cos t$; $\qquad y = -\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \sin t$; $\qquad t \in [0; 2\pi)$.

3.4 Hyperbola



Platí: $\quad |\mathrm{F_1M}| - |\mathrm{MF_2}| = 2a$, $\qquad e^2 = a^2 + b^2$,

$$|\mathrm{F_1M}| = \sqrt{(e+x)^2 + y^2}, \qquad |\mathrm{F_2M}| = \sqrt{(e-x)^2 + y^2},$$

$$\left|\sqrt{(e+x)^2 + y^2} - \sqrt{(e-x)^2 + y^2}\right| = 2a,$$

$$b^2 x - a^2 y = a^2 b^2.$$

A, B	hlavní vrcholy;	$\lvert\mathrm{AS}\rvert = \lvert\mathrm{SB}\rvert$	hlavní poloosa (reálná)	$= a$;
C, D	vedlejší vrcholy;	$\lvert\mathrm{CS}\rvert = \lvert\mathrm{SD}\rvert$	vedlejší poloosa (imaginární)	$= b$;
F_1, F_2	ohniska;	$\lvert\mathrm{SF}_1\rvert = \lvert\mathrm{SF}_2\rvert$	excentricita	$= e$;

$|\mathrm{CF}_1| = |\mathrm{CF}_2| = e$.

Asymptoty procházejí středem S a s osou *x* svírají úhel φ, pro který platí $\tan\varphi = \frac{b}{a}$.

Středový tvar rovnice hyperboly v kanonickém tvaru, jestliže v ose *x* leží osa reálná:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

V případě posunutí se zachováním rovnoběžnosti os tak, že $S=(m;n)$ bude normální tvar rovnice hyperboly: $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$.

Parametrické rovnice hyperboly: $x=m+\frac{a}{\cos t}$; $y=n+b\cdot\tan t$;

nebo $x=m+\frac{a}{\sin t}$; $y=n+b\cdot\cot t$.

Pro středový tvar pak $x=\frac{a}{\cos t}$; $y=b\cdot\tan t$, neboť

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2}{a^2\cos^2 t}-\frac{b^2\tan^2 t}{b^2}=\frac{1}{\cos^2 t}-\tan^2 t=\frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\cos^2 t}-\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}=1.$$

Příklad č. 2: Je dána obecná rovnice hyperboly $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$. Určete její polohu, velikost hlavní a vedlejší poloosy, velikost excentricity, souřadnice středu, hlavních a vedlejších vrcholů a obou ohnisek. Napište obecné rovnice obou asymptot.

Řešení:

$9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$,

$9(x^2+10x)-16(y^2-2y)=367$,

$9[(x+5)^2-25]-16[(y-1)^2-1]=367$,

$9(x+5)^2-16(y-1)^2=367+225-16=576$,

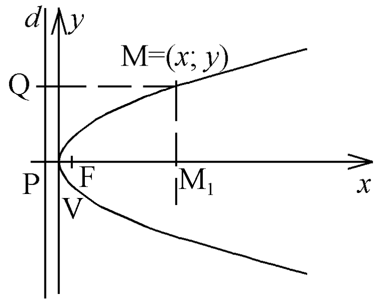
$\frac{(x+5)^2}{64}-\frac{(y-1)^2}{36}=1$,

$e^2=a^2+b^2 \quad\Rightarrow\quad e^2=64+36=100 \quad\Rightarrow\quad e=10$.

Hyperbola má hlavní osu rovnoběžnou se souřadnicovou osou *x*.
Hlavní (reálná) poloosa má velikost $a=8$.
Vedlejší (imaginární) poloosa má velikost $b=6$.
Excentricita má velikost $e=10$.
Střed hyperboly má souřadnice: $S=(-5;1)$.
Hlavní vrcholy mají souřadnice: $A=(-13;1)$; $B=(3;1)$.
Vedlejší vrcholy mají souřadnice: $C=(-5;7)$; $D=(-5;-5)$.
Ohniska mají souřadnice: $F_1=(5;1)$; $F_2=(-15;1)$.
Asymptota a_{I} prochází středem $S=(-5;1)$ a bodem $E=(3;7)$. Směrový vektor $\boldsymbol{u}=(8;6)=(4;3)$.
Obecná rovnice je $3x-4y+c=0$ $\Rightarrow a_{\mathrm{I}}: 3x-4y+19=0$.
Asymptota a_{II} prochází středem $S=(-5;1)$ a bodem $G=(-13;7)$.
Směrový vektor $\boldsymbol{u}=(8;-6)=(4;-3)$.
Obecná rovnice je $3x+4y+c=0$ $\Rightarrow a_{\mathrm{II}}: 3x+4y+11=0$.
Nebo lze vycházet z toho, že asymptota a_{I} svírá s osou *x* úhel φ, pro který platí $\tan\varphi=\frac{b}{a}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$. Směrnicový tvar asymptoty pak má rovnici $y=\frac{3}{4}x+c$ $\Rightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{19}{4}$
a obecná rovnice pak tvar $3x-4y+19=0$.

Asymptota a_{II} svírá s osou *x* úhel φ, pro který platí $\tan\varphi=-\frac{b}{a}=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}$. Směrnicový tvar asymptoty pak má rovnici $y=-\frac{3}{4}x+c$ $\Rightarrow y=-\frac{3}{4}x-\frac{11}{4}$
a obecná rovnice pak tvar $3x+4y+11=0$.

3.5 Parabola



$$y^2 = 2px.$$

Platí: $|MF| = |MQ|$, kde Q je pata kolmice vedené z bodu M na řídící přímku *d*.
Parabola je u nás zadána ohniskem F a řídící přímkou *d*.

V	vrchol paraboly;
P	průsečík osy paraboly s řídící přímkou *d*;
p	parametr paraboly, vzdálenost ohniska od řídící přímky;
$\lvert FV\rvert = \frac{p}{2} = VP$	polovina parametru;

$$|MF| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}; \qquad |MQ| = x + \frac{p}{2}; \qquad \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Kanonický tvar: $y^2 = 2px$.
Má-li vrchol paraboly souřadnice $V = (m; n)$, osa paraboly je rovnoběžná s osou *x*, parametr $p > 0$, je normální tvar rovnice paraboly: $(y - n)^2 = 2p(x - m)$.

Parametrické rovnice paraboly: $x = \frac{t^2}{2p}$; $\quad y = t$; $\quad t \in (-\infty; \infty)$.

Pro parabolu $(y - n)^2 = 2p(x - m)$ bude: $x = \frac{t^2}{2p} + m$; $\quad y = t + n$; $\quad t \in (-\infty; \infty)$.

Příklad č. 3: Je dána obecná rovnice paraboly $x^2 - 10x - 9y + 61 = 0$. Určete její polohu, velikost parametru, souřadnice vrcholu, ohniska a napište obecnou rovnici řídící přímky.

Řešení: $x^2 - 10x - 9y + 61 = 0$,

$(x - 5)^2 = 9y - 61 + 25$,

$(x - 5)^2 = 9y - 36 \quad \Rightarrow \quad (x - 5)^2 = 9(y - 4)$.

Osa paraboly je rovnoběžná se souřadnicovou osou y.
Parabola je orientovaná souhlasně s osou *y*.

Parametr $p = \frac{9}{2} = 4{,}5$. Vzdálenost ohniska od vrcholu je $\frac{p}{2} = \frac{9}{4}$.

Souřadnice vrcholu jsou $V = (5; 4)$ a ohniska $F = \left(5; \frac{25}{4}\right)$.

Obecná rovnice řídící přímky je $y = \frac{7}{4}$.

4 Kvadriky – kvadratické plochy v E_3

Plochy druhého stupně jsou dány rovnicí v kartézských souřadnicích

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + 2a_{23}yz + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{33} = 0$$

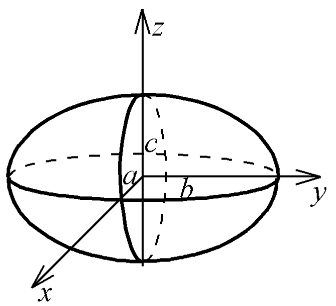
obecná rovnice kvadriky, kde alespoň jeden z koeficientů a_{ij}, pro $i, j = 1, 2, 3$ je různý od nuly.

Z koeficientů $a_{ij} = a_{ji}$ sestavíme **matici kvadriky**: $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$.

Jestliže je $|\boldsymbol{M}| \neq 0$ je kvadrika regulární (středová): elipsoidy (kulová plocha)
hyperboloidy
paraboloidy .

Jestliže je $|\boldsymbol{M}| = 0$ je kvadrika singulární (nestředová): kvadratické válce
kuželové plochy
dvojice rovin.

4.1 Elipsoid



Vhodnou volbou souřadnicové soustavy lze v kanonickém tvaru vyjádřit elipsoid rovnicí:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Rozeznáváme elipsoid	trojosý	$a \neq b \neq c \neq a$	*a*, *b*, *c* jsou poloosy
	kulovou plochu	$a = b = c = r$	*r* poloměr
	rotační (kolem osy z)	$a = b \neq c$	
	protáhlý (prodloužený)	$c > a$	ragbyový míč
	zploštělý	$c < a$	disk.

Jestliže $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$ pak elipsoid nazýváme imaginární (nemá žádný reálný bod).

Příklad č. 1: Kvadrika je dána rovnicí $100x^2 + 225y^2 + 36z^2 - 900 = 0$. Určete její střed, druh a poloosy.

Řešení:

$$100x^2 + 225y^2 + 36z^2 - 900 = 0,$$

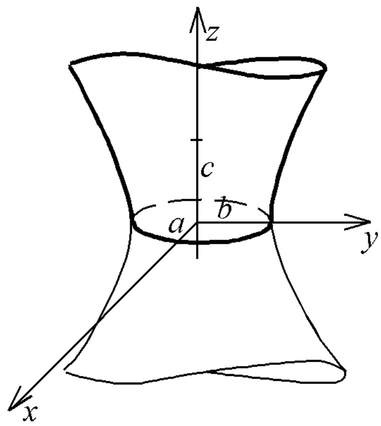
$$100x^2 + 225y^2 + 36z = 900,$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 1.$$

Trojosý elipsoid se středem v počátku soustavy souřadné. Poloosa $a = 3$, $b = 2$ a $c = 5$.

4.2 Hyperboloid

a) Trojosý jednodílný hyperboloid



Rovnice v kanonickém tvaru $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

Pro $a \neq b$ trojosý jednodílný hyperboloid, a, b jsou reálné poloosy, na ose z je imaginární poloosa c;

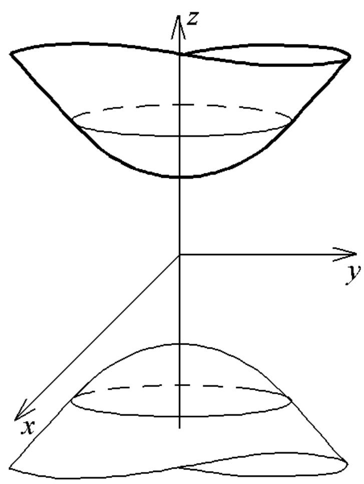
pro $a = b$ rotační jednodílný hyperboloid.

Rovnici $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ můžeme zapsat: $\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{x}{a}\right)$ a tu můžeme také získat ze soustavy rovnic:

$$\begin{aligned}\lambda\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)&=\mu\left(1+\frac{x}{a}\right)\\ \mu\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)&=\lambda\left(1-\frac{x}{a}\right)\end{aligned} \quad \text{nebo} \quad \begin{aligned}\lambda\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)&=\mu\left(1-\frac{x}{a}\right)\\ \mu\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)&=\lambda\left(1+\frac{x}{a}\right)\end{aligned}.$$

Tyto rovnice nám popisují dvě soustavy přímek, které tvoří povrchové přímky (površky) hyperboloidu (hyperbolický regulus plochy), nazýváme je navzájem komplementární.

b) Trojosý dvojdílný hyperboloid



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$$

s reálnou poloosou c na ose z.

Rovnice v kanonickém tvaru $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$;

$a \neq c$;

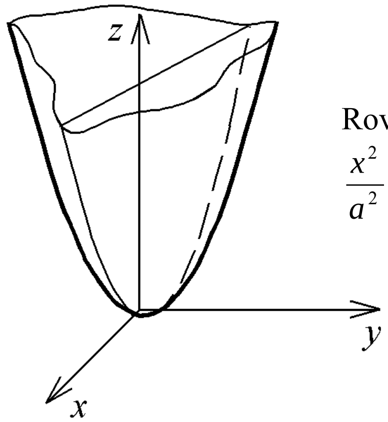
a reálná poloosa;

b, c imaginární poloosy.

Poznámka: Rotací hyperboly $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ kolem osy x vznikne dvojdílný rotační hyperboloid a rotací téže hyperboly kolem osy y vznikne jednodílný rotační hyperboloid.

4.3 Paraboloid

a) Eliptický paraboloid



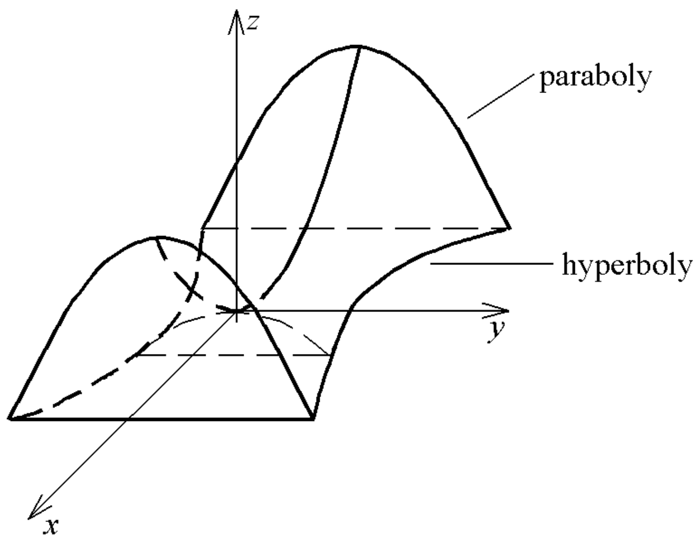
Rovnice v kanonickém tvaru

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z; \qquad a \neq b,$$

a^2, b^2 nazýváme parametry eliptického paraboloidu.
Jestliže $a = b$, pak hovoříme o rotačním paraboloidu.

b) Hyperbolický paraboloid

Rovnice v kanonickém tvaru $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$.



Tuto rovnici můžeme rozložit na dvě soustavy rovnic:

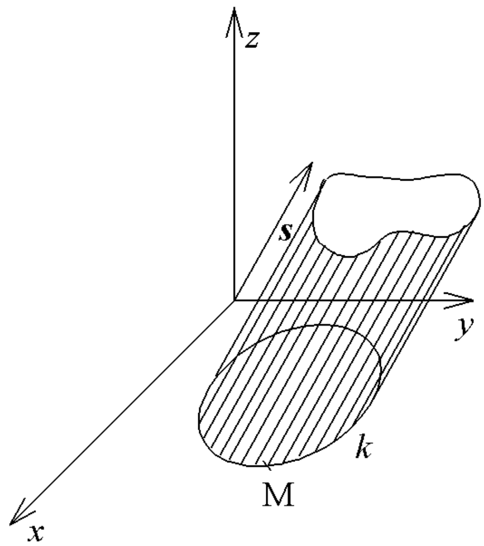
$$\begin{aligned}\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)&=2\mu\\ \mu\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)&=\lambda z\end{aligned} \qquad \text{nebo} \qquad \begin{aligned}\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)&=2\mu z\\ \mu\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)&=\lambda\end{aligned}.$$

Popisují dva parabolické reguly přímek – tvořící přímky hyperbolického paraboloidu.

Poznámka: Často se vyskytuje rovnice $z = xy$, která popisuje ortogonální hyperbolický paraboloid. $\begin{matrix}\lambda x = \mu \\ \mu y = \lambda z\end{matrix}$ nebo $\begin{matrix}\mu x = \lambda z \\ \lambda y = \mu\end{matrix}$.

Roviny souměrnosti $x = y$ a $x = -y$ protínají plochu v hlavních parabolách $z = y^2$ a $z = -y^2$ a jsou na sebe kolmé.

4.4 Kvadratická válcová plocha



Kvadratická válcová plocha je vytvořena přímkami daného směru $\boldsymbol{s}$, které protínají danou kuželosečku k (řídící čáru) v rovině xy.

Daný směr $\boldsymbol{s} = (s_1; s_2; s_3)$ tvořících přímek (površek) není rovnoběžný s rovinou kuželosečky k.

$\boldsymbol{M} = (x_0; y_0; 0) \in k: \quad F(x, y) = 0; \quad z = 0;$

$\boldsymbol{s} = (s_1; s_2; s_3)$ směr površek válcové plochy.

Površky procházející bodem M řídící kuželosečky mající směr $\boldsymbol{s}$ jsou dány rovnicemi (parametrickými) $x = x_0 + s_1 t; \quad y = y_0 + s_2 t; \quad z = s_3 t$.

Vyloučením parametru t dostaneme: $x_0 = x - \frac{s_1}{s_3} z; \;\; y_0 = y - \frac{s_2}{s_3} z$; dosazeno do rovnice kuželosečky $F(x, y) = 0$.

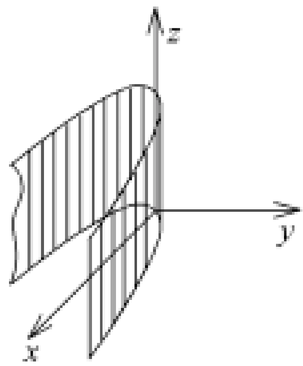
$F(x - \frac{s_1}{s_3} z; y - \frac{s_2}{s_3} z) = 0$ …**kvadratická válcová plocha.**

Poznámka: Je-li směr $\boldsymbol{s}$ površek kolmý na rovinu kuželosečky (řídící), nazýváme válcovou plochu **přímou**. Podle druhu řídící kuželosečky nazýváme válcové plochy: kruhové (přímý kruhový = rotační), eliptické, hyperbolické, nebo parabolické.

Příklad č. 2: Napište rovnici přímé válcové plochy (přímého válce) s řídící křivkou v rovině xy: $x = t; \quad y^2 = 2at$.

Řešení: Řídící křivka k: $y^2 = 2ax \wedge z = 0$.

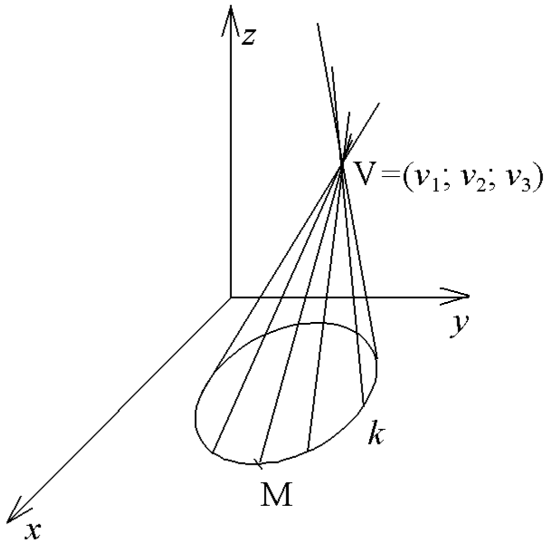
V E_3 je rovnice $y^2 = 2ax \, (a > 0)$ rovnicí přímého parabolického válce.



$y^2 = 2ax \wedge z = 0.$

4.5 Kvadratická kuželová plocha

Kvadratická kuželová plocha je vytvořena pohybující se přímkou, která prochází danou řídící kuželosečkou k a daným pevným bodem V – vrcholem, který neleží v rovině kuželosečky.



$$\mathrm{M} = (x_0 ; y_0 ; 0);$$
$$k : F(x, y) = 0 \wedge z = 0 .$$

Površka MV má parametrické rovnice: $\begin{cases} x = x_0 + (v_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (v_2 - y_0)t \\ z = v_3 t \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_0 = \dfrac{v_1 z - v_3 x}{z - v_3} \\ y_0 = \dfrac{v_2 z - v_3 y}{z - v_3} \end{array}.$

Dosazením do rovnice kuželosečky:

$F\left(\dfrac{v_1 z - v_3 x}{z - v_3}; \dfrac{v_2 z - v_3 y}{z - v_3}\right) = 0 \ldots$**kvadratická kuželová plocha.**

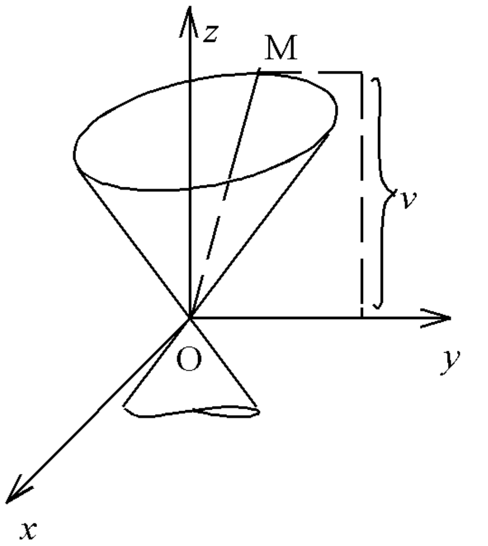
Poznámka: Je-li pravoúhlý průmět vrcholu střed kuželosečky, nazýváme kuželovou plochu **přímou**.

Příklad č. 3: Napište rovnici přímé eliptické kuželové plochy s vrcholem v počátku a s řídící elipsou: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \wedge z = v$.

Řešení: Rovnice řídící kuželosečky: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \wedge z = v$. Bod $\mathrm{M} = (x_0 ; y_0 ; v)$,

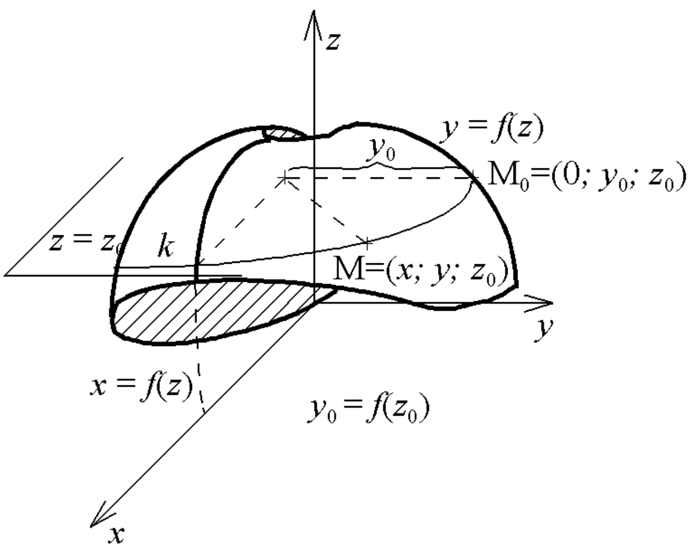
přímka OM: $x = x_0 t;$ $\quad y = y_0 t;$ $\quad z = vt \Rightarrow$ $\quad x_0 = \dfrac{xv}{z};$ $\quad y_0 = \dfrac{yv}{z}$

a dosazením do rovnice kuželosečky $\dfrac{v^2 x^2}{a^2 z^2} + \dfrac{v^2 y^2}{b^2 z^2} = 1$ vynásobením zlomkem $\dfrac{z^2}{v^2}$ dostaneme rovnici přímé kuželové plochy $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{v^2}$.



5 Rotační plochy v E_3

V rovině je dána přímka *o* a křivka *C*. Křivka *C* se otáčí (rotačním pohybem) kolem přímky *o* a tím vytváří plochu. Taková plocha se nazývá **rotační**, přímka *o* je **osa rotace**. Pro jednoduchost uvažujme rovinu rotující čáry *C* (**meridian rotační plochy**), ležící v jedné ze souřadnicových rovin, jež se protínají v souřadnicové ose (**ose rotace**). Každý bod čáry *C* opisuje při rotaci kružnici *k* (rovnoběžku rotační plochy), jejíž střed je na ose rotace a jejíž poloměr je roven vzdálenosti bodu čáry *C* od osy.

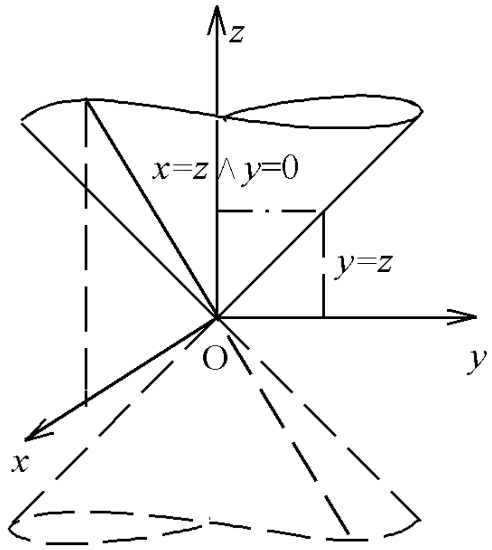


Plocha vznikne rotací meridiánu $y = f(z)$ v rovině (*yz*) nebo rotací meridiánu $x = f(z)$ v rovině (*xz*); vždy rotací kolem osy *z*. Libovolný bod $\mathrm{M} = (x; y; z_0)$ opíše kružnici *k* (*k*-rovnoběžku) o poloměru $f(z_0); k: x^2 + y^2 = f(z_0) \wedge z = z_0$. Jestliže bod M_0 proběhne meridián, potom kružnice *k* vytvoří rotační plochu s osou rotace v ose *z* danou meridiánem $y = f(z)$ (nebo $x = f(z)$) o rovnici $x^2 + y^2 = f^2(z)$ (kolem osy *z*). Bod $\mathrm{M} = (x; y; z)$ je obecný bod plochy.

Cyklickou záměnou proměnných dostaneme rovnice dalších rotačních ploch. Rotační plocha o rovnici: $x^2 + z^2 = f^2(y)$ vznikne rotací čáry $z = f(y) \wedge x = 0$ nebo čáry $x = f(y) \wedge z = 0$ kolem osy *y*. Rotační plocha o rovnici: $y^2 + z^2 = f^2(x)$ vznikne rotací čáry $y = f(x) \wedge z = 0$ nebo čáry $z = f(x) \wedge y = 0$ kolem osy *x*.

Příklad č. 1: Napište rovnici plochy, jež vznikne rotací přímky $x = z \wedge y = 0$ kolem osy z.

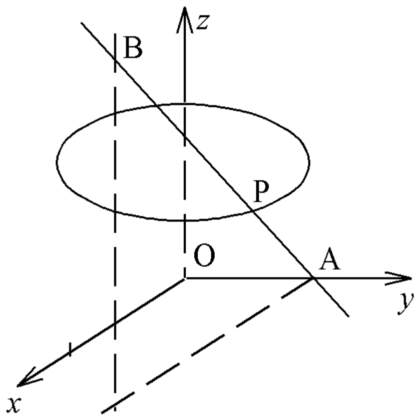
Řešení: Meridián má rovnici $x = z$ nebo $y = z$. Rovnice rotační kuželové plochy s vrcholem v počátku má rovnici $x^2 + y^2 = z^2$.



Příklad č. 2: Odvoďte rovnici plochy, jež vznikne rotací přímky $p: x = 2t;\ y = 2;\ z = 3t$ kolem osy z.

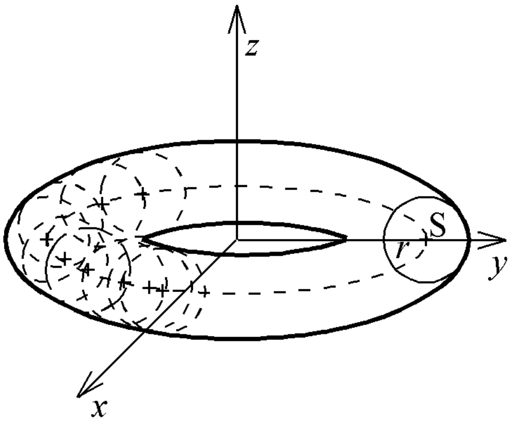
Řešení: Každý bod $\mathrm{P} = (x; y; z)$ přímky p (například pro $t = 0;\ \mathrm{A} = (0; 2; 0)$, pro $t = 2;\ \mathrm{B} = (4; 2; 6)$) opisuje při rotaci kolem osy z kružnici $x^2 + y^2 = \rho^2 \wedge z = z_0$, kde ρ je vzdálenost bodu P od osy z. Bod P leží na p a má souřadnice $\mathrm{P} = (\frac{2z}{3}; 2; z)$ a tudíž od osy z má vzdálenost $\rho = \sqrt{\frac{4z^2}{9} + 4}$, takže platí:

$x^2 + y^2 = 4 + \frac{4z^2}{9} \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$, což je jednodílný rotační hyperboloid.



Poznámka: Tento hyperboloid vznikne také rotací hyperboly $\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1 \wedge y = 0$ kolem osy z.

5.1 Anuloid – rotační plocha čtvrtého stupně



Anuloid je rotační plocha čtvrtého stupně. Vznikne rotací kružnice kolem přímky (osy rotace, osy anuloidu), která leží v rovině kružnice a kružnici neprotíná.

Pro jednoduchost: zvolme kružnici k poloměru r v rovině (yz) se středem $S = (0; n; 0)$ na ose y a osu rotace ztotožníme s osou z ($n > r$). Z rovnice kružnice k: $(y-n)^2 + z^2 = r^2$ vyjádříme $y = \pm\sqrt{r^2 - z^2} + n$ a dosadíme do dříve odvozeného vzorce, takže obdržíme $x^2 + y^2 = \left(\sqrt{r^2 - z^2} + n\right)^2$ a po úpravě obdržíme $\left(x^2 + y^2 + z^2 + n^2 - r^2\right)^2 = 4n^2\left(x^2 + y^2\right)$, což je **rovnice anuloidu** (plocha prstencová).

Poznámka: Plocha je čtvrtého stupně, proměnné se vyskytují ve čtvrtém stupni (přímka plochu protíná ve čtyřech bodech).

6 Řešené příklady v E_3

Příklad č. 1: Čtyřstěn je dán vrcholy $A=(3;2;-1), B=(2;2;0), C=(-1;1;1), D=(-1;-2;3)$.

Určete: a) objem čtyřstěnu ABCD,

b) obsah stěny ABC,

c) tělesovou výšku na stěnu ABC.

Řešení: Smíšený součin vektorů $\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AC}$, $\boldsymbol{AD}$ udává objem rovnoběžnostěnu (podstava je rovnoběžník, který vznikne doplněním trojúhelníka ABC a boční hrana je tvořena vektorem $\boldsymbol{AD}$). Objem trojbokého hranolu bychom získali vydělením dvěma, objem čtyřbokého jehlanu vydělením třemi a tedy objem trojbokého jehlanu (čtyřstěnu) získáme vydělením šesti.

$\boldsymbol{AB}=(b_1-a_1;b_2-a_2;b_3-a_3)=(-1;0;1)$,

$\boldsymbol{AC}=(c_1-a_1;c_2-a_2;c_3-a_3)=(-4;-1;2)$

$\boldsymbol{AD}=(d_1-a_1;d_2-a_2;d_3-a_3)=(-4;-4;4)$.

Smíšený součin $[\boldsymbol{AB}\ \ \boldsymbol{AC}\ \ \boldsymbol{AD}]=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ -4 & -1 & 2\\ -4 & -4 & 4\end{vmatrix}=4+16-4-8=8$.

a) Objem čtyřstěnu $V=\dfrac{4}{3}$.

Velikost vektorového součinu vektorů $\boldsymbol{AB}\ \ \boldsymbol{AC}$ udává obsah rovnoběžníka, který vznikne doplněním trojúhelníka ABC na rovnoběžník. Obsah trojúhelníka ABC získáme vydělením dvěma.

$\boldsymbol{AB}=(b_1-a_1;b_2-a_2;b_3-a_3)=(-1;0;1)$,

$\boldsymbol{AC}=(c_1-a_1;c_2-a_2;c_3-a_3)=(-4;-1;2)$

$\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -1 & 0 & 1\\ -4 & -1 & 2\end{vmatrix}\equiv(1;-2;1)$. Velikost $|\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{AC}|=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$.

b) Obsah stěny ABC je $P=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Tělesovou výšku na stěnu ABC můžeme počítat nezávisle na předchozích výsledcích jako vzdálenost bodu D od roviny ABC, nebo můžeme spustit kolmici s bodu D na rovinu ABC a vypočítat vzdálenost bodu D od paty této kolmice, nebo můžeme použít předchozí výsledky a využít známého vzorce pro výpočet objemu jehlanu $V=\dfrac{P\cdot v}{3}$ a tedy $v=\dfrac{3V}{P}=\dfrac{8}{\sqrt{6}}=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$. Jestliže budeme tělesovou výšku počítat jako vzdálenost bodu D od roviny ABC, pak normálový vektor roviny ABC je $\boldsymbol{n}=(1;-2;1)$, což vyplývá z vektorového součinu $\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{AC}$. Obecná rovnice roviny ABC je $x-2y+z+2=0$. Vzdálenost bodu D od roviny ABC je pak $\dfrac{|1\cdot(-1)-2\cdot(-2)+1\cdot 3+2|}{\sqrt{1+4+1}}=\dfrac{8}{\sqrt{6}}=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$.

c) Tělesová výška na stěnu ABC je tedy $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$.

Příklad č. 2: Jsou dány body $A=(1;-1;0), B=(-1;0;-1), C=(0;0;1), D=(1;1;1)$ a rovina $\rho: x-y+3z-8=0$.

Určete: a) rovnici roviny σ procházející body ABC,

b) vzdálenost bodu D od roviny ρ,

c) bodem D veďte rovinu τ procházející průsečnicí rovin ρ a σ.

Řešení: Normálový vektor roviny σ získáme pomocí vektorového součinu $\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{AC}$,

$\boldsymbol{AB}=(b_1-a_1;b_2-a_2;b_3-a_3)=(-2;1;-1)$,

$\boldsymbol{AC}=(c_1-a_1;c_2-a_2;c_3-a_3)=(-1;1;1)$

$\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -2 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(2;3;-1)$. Rovina σ má obecnou rovnici

$2x+3y-z+d=0$ a po dosazení například bodu C získáme $d=1$.

a) Rovnice roviny σ procházející body ABC je $2x+3y-z+1=0$.

Vzdálenost bodu D od roviny ρ vypočítáme podle vzorce dosazením

a dostaneme: $\dfrac{|1\cdot1-1\cdot1+3\cdot1-8|}{\sqrt{1+1+9}}=\dfrac{5}{\sqrt{11}}=\dfrac{5\sqrt{11}}{11}$.

b) Vzdálenost bodu D od roviny ρ je $\dfrac{5\sqrt{11}}{11}$.

Směrový vektor $\boldsymbol{s}$ (průsečnice rovin ρ a σ) získáme jako vektorový součin normálových vektorů rovin ρ a σ.

Tedy $\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & -1 & 3\\ 2 & 3 & -1\end{vmatrix}\equiv(-8;7;5)=(-8;-7;-5)$. Rovina τ je určena tímto

vektorem $\boldsymbol{s}$, bodem D a libovolným bodem P ležícím na průsečnici rovin ρ a σ.

Bod P leží v rovině ρ i σ, po volbě $z=1$ dostáváme soustavu rovnic:

$x-y-5=0$

$\underline{2x+3y=0,}$

odkud vychází $y=-2$ a $x=3$. Bod $P=(3;-2;1)$.

Vektor $\boldsymbol{DP}=(p_1-d_1;\,p_2-d_2;\,p_3-d_3)=(2;-3;0)$.

Normálový vektor roviny τ vypočítáme pomocí vektorového součinu

$\boldsymbol{DP}\times\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & -3 & 0\\ 8 & -7 & -5\end{vmatrix}\equiv(15;10;10)=5\cdot(3;2;2)$.

Rovina τ má obecnou rovnici $3x+2y+2z+d=0$ a po dosazení například bodu D vypočítáme $d=-7$.

c) Rovina τ procházející průsečnicí rovin ρ i σ a bodem D má rovnici $3x+2y+2z-7=0$.

Příklad č. 3: Jsou dány body $A=(2;2;0), B=(3;4;-3)$ a přímka $p: x+y+z-1=0 \wedge 2x-y=0$. Určete:

a) rovnici přímky q procházející body AB,

b) rozhodněte o vzájemné poloze přímek p, q,

c) jsou-li různoběžky, stanovte jejich průsečík a úhel, ve zbylých případech jejich vzdálenost.

Řešení: Směrový vektor $\boldsymbol{u}$ přímky q je $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{AB}=(b_1-a_1; b_2-a_2; b_3-a_3)=(1;2;-3)$.

a) Parametrické rovnice přímky q:
$$x=2+t,\quad y=2+2t,\quad z=-3t,\qquad t\in \mathrm{R}.$$

Směrový vektor $\boldsymbol{v}$ přímky p získáme pomocí vektorového součinu normálových vektorů rovin, které tuto přímku určují, tedy $\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \equiv (1;2;-3)$; libovolný bod P ležící na přímce p vypočítáme ze soustavy rovnic obou rovin, které přímku p určují. Při volbě $z=1$ dostáváme $P=(0;0;1)$ a parametrické rovnice přímky

p: $x=s$, $y=2s$, $z=1-3s$, $s\in \mathrm{R}$.

Protože vektory $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ jsou lineárně závislé (jeden je násobkem druhého), jsou přímky rovnoběžné, a protože nemají žádný společný bod (soustava
$$2+t=s,\quad 2+2t=2s,\quad -3t=1-3s,$$
nemá řešení).

b) Přímky p, q jsou rovnoběžné různé.

Vypočítáme tedy jejich vzdálenost jako vzdálenost například bodu P od přímky q.

$$v(\mathrm{P},q)=\frac{|\boldsymbol{u}\times \boldsymbol{AP}|}{|\boldsymbol{u}|},\quad \boldsymbol{AP}=(2;2;-1),\quad \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{AP}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}\equiv(4;-5;-2),$$

$$v(\mathrm{P},q)=\frac{|\boldsymbol{u}\times \boldsymbol{AP}|}{|\boldsymbol{u}|}=\frac{\sqrt{16+25+4}}{\sqrt{1+4+9}}=\sqrt{\frac{45}{14}}.$$

c) Vzdálenost rovnoběžných přímek p, q je $\sqrt{\dfrac{45}{14}}$.

Příklad č. 4: Je dán bod $A=(3;-3;0)$ a přímka
$p: x=2t;\quad y=1-t;\quad z=2t-1;\quad t\in\mathrm{R}$. Určete:

a) obecnou rovnici roviny ρ procházející bodem A kolmo k přímce p,

b) nalezněte vzdálenost bodu A od přímky p,

c) napište rovnici kolmice q spuštěné s bodu A na přímku p.

Řešení: Směrový vektor $\boldsymbol{u}=(2;-1;2)$ přímky p je normálovým vektorem hledané roviny ρ, a proto $\rho: 2x-y+2z+d=0$ a po dosazení bodu A vypočítáme, že $d=-9$.

a) Rovnice roviny ρ procházející bodem A, kolmo k přímce p je $\rho: 2x-y+2z-9=0$.

Vzdálenost bodu A od přímky p budeme počítat podle vzorce $v(\mathrm{A}, p) = \dfrac{|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{AP}|}{|\boldsymbol{u}|}$,

kde P je libovolný bod přímky p, například $\mathrm{P} = (0; 1; -1)$, pak $\boldsymbol{AP} = (3; -4; 1)$;

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{AP} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} \equiv (7; 4; -5),$$

$$v(\mathrm{A}, p) = \frac{|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{AP}|}{|\boldsymbol{u}|} = \frac{\sqrt{49 + 16 + 25}}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{3\sqrt{10}}{3} = \sqrt{10}\,.$$

b) Vzdálenost bodu A od přímky p je $\sqrt{10}$.

Všechny kolmice spuštěné s bodu A na přímku p vyplní rovinu kolmou k přímce p, její obecnou rovnici jsme vypočítali za a) a tedy $\rho : 2x - y + 2z - 7 = 0$. Tato rovina ρ protne přímku p v bodě R a hledaná kolmice q spuštěná s bodu A na přímku p je pak určena body AR. Průsečík R vypočítáme dosazením parametrického vyjádření přímky p do obecné rovnice roviny ρ, tedy $2 \cdot 2t - (1 - t) + 2(-1 + 2t) - 9 = 0 \Rightarrow t = \frac{4}{3} \Rightarrow \mathrm{R} = \left(\frac{8}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$. Směrový vektor $\boldsymbol{s}$ hledané kolmice q je

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{AR} = (r_1 - a_1; r_2 - a_2; r_3 - a_3) = \left(-\frac{1}{3}; \frac{8}{3}; \frac{5}{3}\right) = (1; -8; -5).$$

c) Rovnici kolmice q spuštěné s bodu A na přímku p jsou:

$$\begin{aligned} x &= 3 + t, \\ y &= -3 - 8t, \qquad t \in \mathrm{R}. \\ z &= -5t, \end{aligned}$$

Příklad č. 5: Jsou dány přímky $p : \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{-4-y}{1} = \dfrac{-z+1}{4}$ a q:

$$\begin{aligned} x &= 1 - s, \\ y &= 2 + 5s, \qquad s \in \mathrm{R}. \\ z &= -2 - 7s, \end{aligned}$$

Určete:

a) parametrické rovnice přímky p,

b) rozhodněte o vzájemné poloze přímek p, q,

c) jsou-li různoběžky, stanovte jejich průsečík a úhel, ve zbylých případech jejich vzdálenost.

Řešení: $\dfrac{x-3}{1} = t \Rightarrow x = 3 + t$; $\dfrac{-4-y}{1} = t \Rightarrow y = -4 - t$; $\dfrac{-z+1}{4} = t \Rightarrow z = 1 - 4t$.

a) Parametrické rovnice přímky p:

$$\begin{aligned} x &= 3 + t, \\ y &= -4 - t, \qquad t \in \mathrm{R}. \\ z &= 1 - 4t, \end{aligned}$$

Směrové vektory přímky p: $\boldsymbol{u} = (1; -1; -4)$ a přímky q: $\boldsymbol{v} = (-1; 5; -7)$ jsou lineárně nezávislé (jeden není násobkem druhého), proto jsou přímky buď různoběžné nebo mimoběžné. Vyšetříme tedy, zda mají společný bod, či nemají. Vyřešíme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 3 + t &= 1 - s \\ -4 - t &= 2 + 5s \\ 1 - 4t &= -2 - 7s. \end{aligned}$$

Soustava má řešení $s = -1$ a $t = -1$. Existuje tedy průsečík a

b) přímky p, q jsou různoběžné.

Průsečík R získáme dosazením parametru s nebo t do příslušných parametrických rovnic a dostáváme $R = (2; -3; 5)$. Úhel dvou přímek je definován jako ostrý úhel, který tyto dvě přímky svírají a vypočítáme ho podle vztahu:

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}|\cdot|\boldsymbol{v}|} = \frac{|-1-5+28|}{\sqrt{1+1+16}\cdot\sqrt{1+25+49}} = \frac{22}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{75}} = \frac{11\sqrt{6}}{45} \approx 0{,}5988$$ a úhel $\varphi = 53°\ 13'$.

c) Průsečík přímek p, q je $R = (2; -3; 5)$ a úhel, který přímky svírají je $\varphi = 53°\ 13'$.

Příklad č. 6: Jsou dány roviny $\rho: 11x + 2y - 10z + 5 = 0$ a $\sigma: 2x - 2y + z - 3 = 0$, body $A = (2; 8; 1); B = (1; -1; -2); C = (-3; -1; 4)$ a přímka $r: \dfrac{3-x}{1} = \dfrac{5-y}{2} = \dfrac{1-z}{3}$.

a) Určete rovnice rovin souměrnosti daných dvou rovin ρ a σ,

b) napište obecnou rovnici roviny τ = ABC a parametrické vyjádření přímky r,

c) vypočítejte úhel přímky r s rovinou τ = ABC.

Řešení: Jestliže sečteme jednotkové normálové vektory $\boldsymbol{n}_1; \boldsymbol{n}_2$ rovin ρ a σ, tak získáme normálový vektor jedné roviny souměrnosti τ_1, jestliže je odečteme, tak získáme normálový vektor druhé roviny souměrnosti τ_2. Obě roviny souměrnosti procházejí bodem, který leží na průsečnici roviny ρ a σ a který označíme například P.

$$\boldsymbol{n}_\rho = (11; 2; -10),\ |\boldsymbol{n}_\rho| = \sqrt{121+4+100} = \sqrt{225} = 15,\ \boldsymbol{n}_1 = \left(\frac{11}{15}; \frac{2}{15}; -\frac{10}{15}\right),$$

$$\boldsymbol{n}_\sigma = (2; -2; 1),\ |\boldsymbol{n}_\sigma| = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3,\ \boldsymbol{n}_2 = \left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

Jestliže zvolíme například $x = 0$, pak bod průsečnice $P = \left(0; -\frac{25}{18}; \frac{2}{9}\right)$ a

$$\boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n}_2 = \left(\frac{21}{15}; -\frac{8}{15}; -\frac{5}{15}\right).$$

Rovina souměrnosti $\tau_1: 21x - 8y - 5z + d = 0$ a po dosazení bodu P

$\tau_1: 21x - 8y - 5z - 10 = 0$.

$\boldsymbol{n}_1 - \boldsymbol{n}_2 = \left(\frac{1}{15}; \frac{12}{15}; -\frac{15}{15}\right)$, rovina souměrnosti $\tau_2: x + 12y - 15z + d = 0$ a po dosazení P $\tau_2: x + 12y - 15z + 20 = 0$.

a) Rovnice rovin souměrnosti daných rovin ρ a σ jsou $\tau_1: 21x - 8y - 5z - 10 = 0$ a $\tau_2: x + 12y - 15z + 20 = 0$.

Normálu roviny τ = ABC vypočítáme pomocí vektorového součinu vektorů $\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{AC}$, $\boldsymbol{AB} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2; b_3 - a_3) = (-1; -9; -3)$,

$\boldsymbol{AC} = (c_1 - a_1; c_2 - a_2; c_3 - a_3) = (-5; -9; 3)$,

$$\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & -9 & -3 \\ -5 & -9 & 3 \end{vmatrix} \equiv (-54; 18; -36) = -18\cdot(3; -1; 2),$$ obecná rovnice je

$3x - y + 2z + d = 0$ a po dosazení například bodu B získáme $d = 0$.

b) Obecná rovnice roviny $\tau: 3x - y + 2z = 0$ a parametrické rovnice

přímky r jsou: $x = 3 - t$,

$y = 5 - 2t, \quad t \in \mathrm{R}$.

$z = 1 - 3t$,

Úhel přímky s rovinou je definován jako úhel, který svírá přímka se svým pravoúhlým průmětem do roviny τ = ABC. Můžeme ho tedy spočítat jako doplňkový úhel k ostrému úhlu, který svírá normálový vektor roviny τ = ABC se směrovým vektorem přímky r.

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{u}|} = \frac{|3\cdot(-1)-1\cdot(-2)+2\cdot(-3)|}{\sqrt{9+1+4}\cdot\sqrt{1+4+9}} = \frac{7}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2},$$

$\varphi = \frac{\pi}{3} = 60°$, doplňkový úhel je $\varphi' = \frac{\pi}{6} = 30°$.

c) Úhel, který svírá přímka r s rovinou τ = ABC je $\varphi' = \frac{\pi}{6} = 30°$.

Příklad č. 7: Jsou dány mimoběžky p, q. Určete délku příčky těchto dvou mimoběžek procházejících bodem $M = (0; -3; 3)$, jestliže p: $x = 3t - 1$, q: $x = 2u + 3$,

$y = t + 2, \quad y = -u - 1,$

$z = 1 - 2t, \quad z = u + 2,$

$t, u \in \mathrm{R}$.

Řešení: Přímka p s bodem M určují rovinu ρ, která protíná přímku q v bodě Q. Spojnice bodů QM je již hledaná příčka procházející daným bodem. Abychom mohli stanovit její délku, je třeba ještě vypočítat průsečík příčky QM s přímkou p, označíme ho P. Délka příčky je pak vzdálenost bodů PQ. Nejprve tedy napíšeme obecnou rovnici roviny ρ. Libovolný bod L přímky p má například souřadnice $\mathrm{L} = (-1; 2; 1)$, bod $\mathrm{M} = (0; -3; 3)$ a tedy vektor $\boldsymbol{LM} = (1; -5; 2)$, směrový vektor přímky p má souřadnice $(3; 1; -2)$. Oba tyto vektory leží v rovině ρ a proto její normálový vektor vypočítáme pomocí vektorového součinu těchto dvou vektorů, je tedy $\boldsymbol{n} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} \equiv (-8; -8; -16) = 8\cdot(1; 1; 2)$. Obecná rovnice roviny ρ je $\rho: x + y + 2z + d = 0$ a po dosazení například bodu M je $d = -3$ a $\rho: x + y + 2z - 3 = 0$. Průsečík této roviny ρ s přímkou q vypočítáme dosazením parametrického vyjádření přímky q do obecné rovnice roviny, tedy $2u + 3 - u - 1 + 2u + 4 - 3 = 0 \Rightarrow 3u = -3 \Rightarrow u = -1$. Po dosazení do rovnic přímky q dostáváme $\mathrm{Q} = (1; 0; 1)$. Parametrické vyjádření příčky r: $x = 1 + s$,

$y = 3s, \quad s \in \mathrm{R}$.

$z = 1 - 2s$,

Průsečík přímky r s přímkou p pak vypočítáme ze soustavy rovnic:

$3t - 1 = 1 + s$

$t + 2 = -3s$

$1 - 2t = 1 - 2s$,

odkud $t = 1$ a bod $\mathrm{P} = (2; 3; -1)$. Vzdálenost bodů PQ je $|\boldsymbol{PQ}| = |(1; 3; -2)| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$.

Délka příčky mimoběžek p, q procházející bodem M je $\sqrt{14}$.

Příklad č. 8: Jsou dány mimoběžky p, q. Určete délku příčky těchto dvou mimoběžek rovnoběžnou s přímkou $s:\frac{x+1}{-4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{1}$ jestliže:

$$p:\ x = 2t+1,\quad y=-3t-2,\quad z = t-1,\qquad q:\ x = 3u-2,\quad y = 2u-1,\quad z=-2u,\qquad t,u\in \mathrm{R}.$$

Řešení: Přímka p a směrový vektor $\boldsymbol{s}$ přímky s určují rovinu ρ, ve které leží hledaná příčka. Průnik této roviny s přímkou q je již bodem Q příčky r, jejímž směrovým vektorem je vektor $\boldsymbol{s}$. Abychom stanovili délku této příčky, je nutné ještě vypočítat průsečík příčky r s přímkou p a to bod P. Vzdálenost bodů QP je hledaná délka. Nejprve si určíme obecnou rovnici roviny ρ, vektor $\boldsymbol{s}=(-4;1;1)$ a směrový vektor přímky p má souřadnice $(2;-3;1)$. Oba tyto vektory leží v rovině ρ a proto její normálový vektor vypočítáme pomocí vektorového součinu těchto dvou vektorů, je tedy $\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -4 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} \equiv (4;6;10)=2\cdot(2;3;5)$. Obecná rovnice roviny ρ je $\rho: 2x+3y+5z+d=0$ a po dosazení například bodu $(1;-2;-1)$, což je bod přímky p, dostáváme, že $d=9$ a odtud $\rho: 2x+3y+5z+9=0$. Průsečík této roviny ρ s přímkou q vypočítáme dosazením parametrického vyjádření přímky q do obecné rovnice roviny, tedy $6u-4+6u-3-10u+9=0 \Rightarrow 2u=-2 \Rightarrow u=-1$. Po dosazení do rovnic přímky q dostáváme $\mathrm{Q}=(-5;-3;2)$. Parametrické vyjádření příčky r:

$$x=-5-4s,\quad y=-3+s,\quad z=2+s,\qquad s\in \mathrm{R}.$$

Průsečík přímky r s přímkou p pak vypočítáme ze soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} -5-4s &= 2t+1 \\ -3+s &= -3t-2 \\ 2+s &= t-1 \end{aligned}$$

odkud $s=1$ a bod $\mathrm{P}=(3;-5;0)$. Vzdálenost bodů PQ je

$|\boldsymbol{PQ}|=|(-8;2;2)|=2\sqrt{16+1+1}=2\sqrt{18}=6\sqrt{2}$.

Délka příčky mimoběžek p, q, která je rovnoběžná s přímkou s je $6\sqrt{2}$.

Příklad č. 9: Jsou dány body $\mathrm{A}=(3;2;1); \mathrm{B}=(-1;0;1)$ a přímka $p: x-y+4=0 \wedge y+z=0$. Určete:

a) rovnici přímky q procházející body AB ,

b) rozhodněte o vzájemné poloze přímek p, q,

c) jsou-li různoběžky, stanovte jejich průsečík a úhel, ve zbylých případech jejich vzdálenost.

Řešení: Směrový vektor $\boldsymbol{u}$ přímky q je $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{AB}=(-4;-2;0)=(2;1;0)$.

a) Parametrické rovnice přímky q: $x=-1+2t,\quad y=t,\quad z=1,\qquad t\in \mathrm{R}$.

Směrový vektor $\boldsymbol{v}$ přímky p získáme pomocí vektorového součinu normálových vektorů rovin, které tuto přímku určují, tedy $\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \equiv (1; 1; -1)$; libovolný bod M ležící na přímce p vypočítáme ze soustavy rovnic obou rovin, které přímku p určují. Při volbě $z = 0$ dostáváme $\mathrm{M} = (-4; 0; 0)$ a parametrické rovnice přímky p:

$$\begin{aligned} x &= -4 + s, \\ y &= \quad s, \qquad s \in \mathrm{R}. \\ z &= \; -s, \end{aligned}$$

Protože vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ jsou lineárně nezávislé (jeden není násobkem druhého), jsou přímky různoběžné nebo mimoběžné, podle toho jestli mají společný bod nebo ne. Protože soustava rovnic

$$\begin{aligned} -1 + 2t &= -4 + s \\ t &= \quad s \\ 1 &= \; -s \end{aligned}$$

nemá řešení, jsou

b) přímky p, q mimoběžné.

Vzdálenost dvou mimoběžných přímek je definována jako délka nejkratší příčky těchto dvou mimoběžek, které se říká osa mimoběžek. Osa mimoběžek je taková příčka, která je kolmá k oběma mimoběžkám a řešíme ji tedy jako příčku daným směrem, kdy směr $\boldsymbol{k}$ je kolmý k oběma mimoběžkám. Vektor $\boldsymbol{k}$ je kolmý ke směrovým vektorům přímek p, q a určíme ho pomocí vektorového součinu, tedy $\boldsymbol{k} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \equiv (-1; 2; 1) = -(1; -2; -1)$. Vektor $\boldsymbol{k}$ a přímka q určují rovinu ρ, ve které leží osa mimoběžek a která protíná přímku p v bodě P, což je jeden bod osy a směr osy $\boldsymbol{k}$ již známe. Abychom stanovili její délku, vypočítáme ještě průsečík osy o s přímkou q, což je bod Q a délka osy je vzdálenost bodů PQ, což je také hledaná vzdálenost mimoběžek. Nejprve si určíme obecnou rovnici roviny ρ, vektor $\boldsymbol{k} = (1; -2; -1)$ a směrový vektor přímky q má souřadnice $(2; 1; 0)$. Oba tyto vektory leží v rovině ρ a proto její normálový vektor vypočítáme pomocí vektorového součinu těchto dvou vektorů, je tedy

$\boldsymbol{n} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \equiv (-1; 2; -5) = -(1; -2; 5)$. Obecná rovnice roviny ρ je $\rho: x - 2y + 5z + d = 0$ a po dosazení například bodu $(-1; 0; 1)$, což je bod přímky q, dostáváme, že $d = -4$ a odtud $\rho: x - 2y + 5z - 4 = 0$. Průsečík této roviny ρ s přímkou p vypočítáme dosazením parametrického vyjádření přímky p do obecné rovnice roviny, tedy

$-4 + s - 2s - 5s - 4 = 0 \Rightarrow -6s = 8 \Rightarrow s = -\frac{4}{3}$. Po dosazení do rovnic přímky p dostáváme $\mathrm{P} = \left(-\frac{16}{3}; -\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

Parametrické vyjádření příčky *o*:
$$x = -\frac{16}{3} + u,\quad y = -\frac{4}{3} - 2u,\quad z = \frac{4}{3} - u,\qquad u \in \mathrm{R}.$$

Průsečík přímky *o*s přímkou *q* pak vypočítáme ze soustavy rovnic:
$$\begin{aligned} -1 + 2t &= -\frac{16}{3} + u \\ t &= -\frac{4}{3} - 2u \\ 1 &= \frac{4}{3} - u, \end{aligned}$$

odkud $t = \frac{1}{3}$ a bod $\mathrm{Q} = (-5; -2; 1)$. Vzdálenost bodů PQ je
$$|\boldsymbol{PQ}| = \left|\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)\right| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

c) Vzdálenost mimoběžných přímek *p*, *q* je $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Příklad č. 10: Na přímce $p: x + 2y + z - 1 = 0 \wedge 3x - y + 4z - 29 = 0$ nalezněte bod, který má stejnou vzdálenost od bodů $\mathrm{A} = (3; 11; 4); \mathrm{B} = (-5; -13; -2)$. Určete bod souměrně sdružený s počátkem soustavy souřadnic vzhledem k rovině $\rho: 6x + 2y - 9z + 121 = 0$. Určete rovnici roviny, která prochází body $\mathrm{D} = (1; -1; -2); \mathrm{E} = (3; 1; 1)$ a je kolmá k rovině $\sigma: x - 2y + 3z = 0$.

Řešení: Množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od daných dvou různých pevných bodů A, B je rovina τ kolmá na přímku AB a procházející středem S úsečky AB. Průnik této roviny τ s přímkou *p* je hledaný bod P. Střed $\mathrm{S} = \left(\frac{3-5}{2}; \frac{11-13}{2}; \frac{4-2}{2}\right) = (-1; -1; 1)$, normálový vektor roviny τ je směrový vektor přímky AB, proto $\boldsymbol{n} = \mathrm{B} - \mathrm{A} = (-8; -24; -6) = (4; 12; 3)$. Rovina τ má obecnou rovnici $\tau: 4x + 12y + 3z + d = 0$ a po dosazení bodu S je $d = 13$ a tedy $\tau: 4x + 12y + 3z + 13 = 0$. Abychom nalezli průsečík roviny τ s přímkou *p*, napíšeme si její parametrické vyjádření. Směrový vektor získáme jako vektorový součin normálových vektorů rovin, které tuto přímku určují, tedy
$$\boldsymbol{s} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} \equiv (9; -1; -7)$$
. Libovolný bod L ležící na přímce *p* vypočítáme ze soustavy rovnic obou rovin, které přímku *p* určují. Při volbě $y = 0$ dostáváme $\mathrm{L} = (-25; 0; 26)$ a parametrické rovnice přímky *p*:
$$x = -25 + 9t,\quad y = -t,\quad z = 26 - 7t,\qquad t \in \mathrm{R}.$$

Průsečík roviny τ s přímkou *p* vypočítáme dosazením parametrického vyjádření přímky *p* do obecné rovnice roviny τ,

$\tau: 4(-25+9t)+12(-t)+3(26-7t)+13=0 \Rightarrow -9+3t=0 \Rightarrow t=3$ a bod $\mathrm{P}=(2;-3;5)$.

Bod, který má stejnou vzdálenost od bodů A, B je bod $\mathrm{P}=(2;-3;5)$.

Bod souměrně sdružený s počátkem soustavy souřadnic vzhledem k rovině ρ leží na kolmici *k* k této rovině ρ procházející počátkem soustavy souřadnic a ve stejné vzdálenosti jako je vzdálenost počátku od roviny ρ. Směrový vektor kolmice *k* je normálovým vektorem roviny ρ a má souřadnice $(6;2;-9)$, rovnice kolmice *k*:

$$\begin{aligned} x &= 6s, \\ y &= 2s, \qquad s \in \mathrm{R}. \\ z &= -9s, \end{aligned}$$

Vzdálenost počátku od roviny ρ je $\dfrac{121}{\sqrt{36+4+81}}=\dfrac{121}{\sqrt{121}}=\sqrt{121}=11$. Pata R kolmice *k* spuštěné s počátku na rovinu ρ je $6\cdot 6s+2\cdot 2s-9(-9s)+121=0 \Rightarrow s=-1$ a $\mathrm{R}=(-6;-2;9)$. Bod souměrně sdružený leží pak ve dvojnásobné vzdálenosti a je $\sqrt{36s^2+4s^2+81s^2}=22 \Rightarrow s=-2$, protože pro bod R máme $s=-1$.

Bod souměrně sdružený s počátkem vzhledem k rovině ρ má tedy souřadnice $(-12;-4;18)$.

Rovina kolmá k rovině σ a procházející body ED, je určena těmito dvěma body a kolmicí k rovině σ procházejí například bodem E. Protože směrový vektor této kolmice je normálovým vektorem roviny σ má souřadnice $(1;-2;3)$, směrový vektor přímky ED má souřadnice $\boldsymbol{ED}=\mathrm{D}-\mathrm{E}=(-2;-2;-3)$, normálový vektor hledané roviny vypočítáme pomocí vektorového součinu těchto dvou vektorů

$\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \equiv (12;-3;-6)=3\cdot(4;-1;-2)$. Hledaná rovina má obecnou rovnici $4x-y-2z+d=0$ a po dosazení například bodu D je $d=-9$.

Rovnice hledané roviny, která prochází body ED a je kolmá na rovinu σ je $4x-y-2z-9=0$.

Příklad č. 11: Nalezněte obvod trojúhelníka XYZ, kde X je průsečík přímek *p*, *q*; Y je průsečík přímky *p* s rovinou ρ trojúhelníka ABC a Z je průsečík přímky *q* s rovinou ρ. Přitom *p* = DE, kde $\mathrm{D}=(1;1;1)$; $\mathrm{E}=(1;3;2)$; přímka $q: x+z-1=0 \wedge x+y=0$ a $\mathrm{A}=(2;-1;0)$, $\mathrm{B}=(3;1;-1)$, $\mathrm{C}=(2;-2;2)$.

Řešení: Nejprve musíme stanovit body X, Y, Z a potom vypočítat jejich vzdálenosti. Proto si určíme obecnou rovnici roviny ρ. Normálový vektor roviny ρ získáme pomocí vektorového součinu $\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{AC}$, $\boldsymbol{AB}=(1;2;-1)$, $\boldsymbol{AC}=(0;-1;2)$,

$\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{AC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \equiv (3;-2;-1)$. Rovina ρ má obecnou rovnici $3x-2y-z+d=0$ a po dosazení například bodu C získáme $d=-8$. Rovnice roviny ρ procházející body ABC je $3x-2y-z-8=0$. Směrový vektor přímky *p* má souřadnice $\boldsymbol{ED}=(0;2;1)$ a parametrické rovnice *p*:

$$\begin{aligned} x &= 1, \\ y &= 1+2t, \qquad t \in \mathrm{R}. \\ z &= 1+\ t, \end{aligned}$$

Směrový vektor přímky q získáme jako vektorový součin normálových vektorů rovin, které tuto přímku určují, tedy $\boldsymbol{s} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \equiv (-1; 1; 1)$. Libovolný bod L ležící na přímce q vypočítáme ze soustavy rovnic obou rovin, které přímku q určují. Při volbě $y = 0$ dostáváme $\mathrm{L} = (0; 0; 1)$ a parametrické rovnice přímky q:

$$\begin{aligned} x &= -s, \\ y &= s, \qquad s \in \mathrm{R}. \\ z &= 1 + s, \end{aligned}$$

$$\mathrm{X} = p \cap q \Rightarrow \begin{aligned} 1 &= -s, \\ 1 + 2t &= s, \\ 1 + t &= 1 + s \end{aligned} \quad \Rightarrow s = -1 \Rightarrow \mathrm{X} = (1; -1; 0).$$

$$\mathrm{Y} = p \cap \rho \Rightarrow 3 - 2(1 + 2t) - (1 + t) - 8 = 0 \Rightarrow t = -\frac{8}{5} \Rightarrow \mathrm{Y} = \left(1; -\frac{11}{5}; -\frac{3}{5}\right),$$

$$\mathrm{Z} = q \cap \rho \Rightarrow -3s - 2s - 1 - s - 8 = 0 \Rightarrow s = -\frac{3}{2} \Rightarrow \mathrm{Z} = \left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right),$$

$$|\boldsymbol{XY}| = \left|\left(0; \frac{6}{5}; \frac{3}{5}\right)\right| = \frac{3}{5}|(0; 2; 1)| = \frac{3}{5}\sqrt{4 + 1} = \frac{3\sqrt{5}}{5},$$

$$|\boldsymbol{YZ}| = \left|\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{10}; \frac{1}{10}\right)\right| = \frac{1}{10}|(5; 7; 1)| = \frac{1}{10}\sqrt{25 + 49 + 1} = \frac{\sqrt{75}}{10},$$

$$|\boldsymbol{XZ}| = \left|\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{2}|(1; 1; 1)| = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 1 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Obvod trojúhelníka XYZ je $\dfrac{3\sqrt{5}}{5} + \dfrac{\sqrt{75}}{10} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{6\sqrt{5} + \sqrt{75} + 5\sqrt{3}}{10} \approx 3{,}073$.

Příklad č. 12: Vypočítejte, kolik kilogramů barvy je potřeba na natření čtyřbokého jehlanu ABCDV bez podstavy ABCD, jestliže jsme v metrech naměřili tyto souřadnice bodů: $\mathrm{A} = (1; 2; 1)$, $\mathrm{B} = (4; -1; 2)$, $\mathrm{C} = (3; 5; 4)$, $\mathrm{V} = (2; 1; 7)$ a víme, že jeden kilogram barvy stačí na 15 m^2.

Řešení: Podstava jehlanu je rovnoběžník a jehlan není kolmý, proto musíme vypočítat obsah každé trojúhelníkové stěny zvlášť. Nejprve si vypočítáme souřadnice vrcholu D, pro které platí $\mathrm{D} = \mathrm{C} + \boldsymbol{BA} = (3; 5; 4) + (-3; 3; -1) = (0; 8; 3)$. Obsah stěny ABV vypočítáme jako polovinu velikosti vektorového součinu vektorů $\boldsymbol{AB}$ a $\boldsymbol{AV}$, protože velikost vektorového součinu dvou vektorů číselně udává obsah rovnoběžníka, který je těmito dvěma vektory určen. Tedy $\boldsymbol{AB} = (3; -3; 1)$, $\boldsymbol{AV} = (1; -1; 6)$,

$$\boldsymbol{AB} \times \boldsymbol{AV} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = (-17; -17; 0) = 17(1; 1; 0) \Rightarrow P_{\mathrm{ABV}} = \frac{17\sqrt{2}}{2} \approx 12{,}0208 \text{ a}$$

obdobně, $\boldsymbol{BC} = C - \mathrm{B} = (-1; 6; 2)$, $\boldsymbol{BV} = \mathrm{V} - \mathrm{B} = (-2; 2; 5)$,

$$\boldsymbol{BC} \times \boldsymbol{BV} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 6 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (26; -1; 10) \Rightarrow P_{\mathrm{BCV}} = \frac{\sqrt{777}}{2} \approx 13{,}9374,$$

$\boldsymbol{CD} = \mathrm{D} - \mathrm{C} = (-3; 3; -1)$, $\boldsymbol{CV} = \mathrm{V} - \mathrm{C} = (-1; -4; 3)$,

$$\boldsymbol{CD} \times \boldsymbol{CV} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -3 & 3 & -1 \\ -1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 5(1; 2; 3) \Rightarrow P_{\mathrm{CDV}} = \frac{5\sqrt{14}}{2} \approx 9{,}3541,$$

$\boldsymbol{AD} = \mathrm{D} - \mathrm{A} = (-1; 6; 2)$, $\boldsymbol{AV} = \mathrm{V} - \mathrm{A} = (1; -1; 6)$,

$$\boldsymbol{AD} \times \boldsymbol{AV} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = (38; 8; -5) \Rightarrow P_{\mathrm{ADV}} = \frac{\sqrt{1533}}{2} \approx 19{,}6150.$$

Celkový povrch S, který je třeba natřít měří

$S = 12{,}021 + 13{,}937 + 9{,}354 + 19{,}615 = 54{,}927$.

Protože na natření 15 m^2 je potřeba 1 kg barvy, tak na 54,93 m^2 je potřeba $\frac{54{,}927}{15} = 3{,}6618$.

Na natření čtyřbokého jehlanu ABCDV bez podstavy potřebujeme přibližně 3,7 kg barvy.

7 Řešené příklady v E_2

Příklad č. 1: Napište obecnou rovnici kružnice (ne ve středovém tvaru), která má průměr AB. Určete její střed a poloměr, jestliže $\mathrm{A} = (-3; 0), \mathrm{B} = (3; 6)$.

Řešení: Průměr kružnice má velikost $|\boldsymbol{AB}| = |(6;6)| = 6|(1;1)| = 6\sqrt{1+1} = 6\sqrt{2}$ a poloměr $r = 3\sqrt{2}$. Střed kružnice je střed úsečky AB, tedy $\mathrm{S} = \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2} = (0; 3)$.

Středová rovnice kružnice

$(x-0)^2 + (y-3)^2 = 18 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6y + 9 = 18 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6y - 9 = 0$.

Obecná rovnice kružnice se středem $\mathrm{S} = (0; 3)$ a poloměrem $r = 3\sqrt{2}$ je $x^2 + y^2 - 6y - 9 = 0$.

Příklad č. 2: Napište obecnou rovnici paraboly (ne ve středovém tvaru), která prochází bodem $\mathrm{X} = (0; 1)$, jestliže její osa je rovnoběžná se souřadnicovou osou x a vrchol $\mathrm{V} = (-1; 2)$. Určete její ohnisko a rovnici řídící přímky.

Řešení: Vrcholový tvar paraboly, která má osu rovnoběžnou s osou x je $(y - v_2)^2 = 2p(x - v_1)$, kde p je parametr a $(v_1; v_2)$ jsou souřadnice vrcholu. V našem případě tedy $(y - 2_2)^2 = 2p(x+1) \Rightarrow y^2 - 4y + 4 = 2px + 2p$, protože parabola prochází bodem X, tak po dosazení dostáváme

$1 - 4 + 4 = 2p \Rightarrow p = \frac{1}{2} \Rightarrow y^2 - 4y + 4 - x - 1 = 0 \Rightarrow y^2 - 4y - x + 3 = 0$.

Protože vzdálenost vrcholu od ohniska je rovna polovině parametru, tak ohnisko F má souřadnice $\mathrm{F} = \left(-1 + \frac{1}{4}; 2\right) = \left(-\frac{3}{4}; 2\right)$ a protože řídící přímka je rovnoběžná s osou y a její vzdálenost od vrcholu je rovna polovině parametru, tak má rovnici $x = -1 - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4}$.

Obecná rovnice paraboly je $y^2 - 4y - x + 3 = 0$, její ohnisko je $\mathrm{F} = \left(-\frac{3}{4}; 2\right)$ a rovnice řídící přímky je $x = -\frac{5}{4}$.

Příklad č. 3: Určete druh a základní prvky kuželosečky $25x^2 + 9y^2 + 50x - 36y - 164 = 0$. V případě paraboly to jsou: souřadnice vrcholu a ohniska, poloha paraboly, směr osy, rovnice řídící přímky a velikost parametru. V případě elipsy to jsou: souřadnice středu a obou ohnisek, velikost hlavní a vedlejší poloosy a excentricity, poloha elipsy (směr hlavní osy). V případě hyperboly to jsou: souřadnice středu a obou ohnisek, velikost hlavní a vedlejší poloosy a excentricity, poloha hyperboly (směr hlavní osy) a rovnice asymptot. V případě kružnice jsou to souřadnice středu a poloměr.

Řešení: Obecnou rovnici kuželosečky převedeme na středový tvar

$$25(x^2 + 2x) + 9(y^2 - 4y) = 164,$$

$$25(x+1)^2 + 9(y-2)^2 = 225,$$

$$\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1.$$

Jedná se tedy o elipsu s hlavní osou rovnoběžnou s osou *y*, velikost hlavní poloosy $a = 5$, vedlejší $b = 3$, excentricita $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$, střed $\mathrm{S} = (-1; 2)$, ohniska $\mathrm{F}_1 = (-1; 6)$ a $\mathrm{F}_2 = (-1; -2)$.

Příklad č. 4: Určete druh a základní prvky kuželosečky $4y^2 - 9x^2 - 54x + 8y - 113 = 0$. V případě paraboly to jsou: souřadnice vrcholu a ohniska, poloha paraboly, směr osy, rovnice řídící přímky a velikost parametru. V případě elipsy to jsou: souřadnice středu a obou ohnisek, velikost hlavní a vedlejší poloosy a excentricity, poloha elipsy (směr hlavní osy). V případě hyperboly to jsou: souřadnice středu a obou ohnisek, velikost hlavní a vedlejší poloosy a excentricity, poloha hyperboly (směr hlavní osy) a rovnice asymptot. V případě kružnice jsou to souřadnice středu a poloměr.

Řešení: Obecnou rovnici kuželosečky převedeme na středový tvar

$$4(y^2 + 2y) - 9(x^2 + 6x) = 113,$$

$$4(y+1)^2 - 9(x+3)^2 = 113 + 4 - 81 = 36,$$

$$\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x+3)^2}{4} = 1.$$

Asymptoty procházejí středem hyperboly a bodem $\mathrm{E} = (-1; 2)$, nebo $\mathrm{G} = (-5; 2)$. Směrový vektor jedné asymptoty je $\boldsymbol{ES} = (-2; -3)$a druhé $\boldsymbol{GS} = (2; -3)$, normálový vektor jedné asymptoty je $(3; -2)$ a druhé $(3; 2)$. Obecné rovnice asymptot jsou $3x - 2y + c_1 = 0$ a $3x + 2y + c_2 = 0$po dosazení například bodu *S* dostáváme $3x - 2y + 7 = 0$ a $3x + 2y + 11 = 0$.

Jedná se tedy o hyperbolu s hlavní osou rovnoběžnou s osou *y*, velikost hlavní poloosy $a = 3$, vedlejší $b = 2$, excentricita $e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$, střed $\mathrm{S} = (-3; -1)$, ohniska $\mathrm{F}_1 = \left(-3; -1 + \sqrt{13}\right)$ a $\mathrm{F}_2 = \left(-3; -1 - \sqrt{13}\right)$. Obecné rovnice asymptot jsou $3x - 2y + 7 = 0$ a $3x + 2y + 11 = 0$.

Příklad č. 5: Napište obecnou rovnici přímky procházející středem kuželosečky $x^2+5y^2+6x=0$ a průsečíkem přímky $p: y=x$ s kuželosečkou. Nalezněte všechna řešení a určete druh a základní prvky kuželosečky. V případě paraboly to jsou: souřadnice vrcholu a ohniska, poloha paraboly, směr osy, rovnice řídící přímky a velikost parametru. V případě elipsy to jsou: souřadnice středu a obou ohnisek, velikost hlavní a vedlejší poloosy a excentricity, poloha elipsy (směr hlavní osy). V případě hyperboly to jsou: souřadnice středu a obou ohnisek, velikost hlavní a vedlejší poloosy a excentricity, poloha hyperboly (směr hlavní osy) a rovnice asymptot. V případě kružnice jsou to souřadnice středu a poloměr.

Řešení: Obecnou rovnici kuželosečky převedeme na středový tvar

$$(x+3)^2+5y^2=9,$$

$$\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{y^2}{\frac{9}{5}}=1.$$

$b=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$, excentricita $e=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9-\frac{9}{5}}=\sqrt{\frac{36}{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$,

Nyní vyšetříme vzájemnou polohu přímky p a elipsy $x^2+5x^2+6x=0 \Rightarrow 6x^2+6x=0 \Rightarrow 6x(x+1)=0$. Přímka protíná elipsu ve dvou bodech $\mathrm{P}_1=(0;0); \mathrm{P}_2=(-1;-1)$. Úloha má tedy dvě řešení a to přímku SP_1 a SP_2. Směrový vektor přímky SP_1 je $(-3;0)$, normálový $(0;3)=(0;1)$ a rovnice přímky je $y=0$.

Směrový vektor přímky SP_2 je $(2;-1)$, normálový $(1;2)$ a rovnice přímky je $x+2y+c=0$ a po dosazení například bodu S pak dostáváme $x+2y+3=0$.

Jedná se tedy o elipsu s hlavní osou rovnoběžnou s osou *x*, velikost hlavní poloosy $a=3$, vedlejší $b=\frac{3\sqrt{5}}{5}$, excentricita $e=\frac{6\sqrt{5}}{5}$, střed $\mathrm{S}=(-3;0)$, ohniska $\mathrm{F}_1=\left(-3+\frac{6\sqrt{5}}{5};0\right)$ a $\mathrm{F}_2=\left(-3-\frac{6\sqrt{5}}{5};0\right)$. Obecná rovnice přímky procházející středem kuželosečky a průsečíkem přímky *p* s kuželosečkou je $y=0$ a $x+2y+3=0$.

Příklad č. 6: Vyšetřete vzájemnou polohu přímky $p: 4x-2y-1=0$ a kuželosečky $4y^2-96x+4y+49=0$. Určete druh a základní prvky kuželosečky. V případě paraboly to jsou: souřadnice vrcholu a ohniska, poloha paraboly, směr osy, rovnice řídící přímky a velikost parametru. V případě elipsy to jsou: souřadnice středu a obou ohnisek, velikost hlavní a vedlejší poloosy a excentricity, poloha elipsy (směr hlavní osy). V případě hyperboly to jsou: souřadnice středu a obou ohnisek, velikost hlavní a vedlejší poloosy a excentricity, poloha hyperboly (směr hlavní osy) a rovnice asymptot. V případě kružnice jsou to souřadnice středu a poloměr.

Řešení: Obecnou rovnici kuželosečky převedeme na středový tvar

$$4(y^2+y)=96x-49,$$

$$4\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=96x-48,$$

$$\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=24x-12,$$

$$\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = 24\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

$\mathrm{F} = \left(\frac{1}{2}+6; -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{13}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ a rovnice řídící přímky je $x = \frac{1}{2} - 6 \Rightarrow x = -\frac{11}{2}$.

Abychom vyšetřili vzájemnou polohu přímky a kuželosečky, tak dosadíme rovnici přímky ve tvaru $4x = 2y + 1$ do rovnice kuželosečky a dostáváme $4y^2 - 24(2y+1) + 4y + 49 = 0$ a odtud

$$4y^2 - 44y + 25 = 0 \Rightarrow y_{12} = \frac{44 \pm \sqrt{1936-400}}{8} = \frac{44 \pm \sqrt{1\,536}}{8} = \frac{11 \pm 4\sqrt{6}}{2}.$$

Jedná se tedy o parabolu s hlavní osou rovnoběžnou s osou x a otočenou vrcholem doleva, velikost parametru $p = 12$, souřadnice vrcholu jsou $\mathrm{V} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, ohniska $\mathrm{F} = \left(\frac{13}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ a rovnice řídící přímky je $x = -\frac{11}{2}$. Přímka je sečnou paraboly a protíná ji ve dvou bodech $\mathrm{P}_1 = \left(3 - \sqrt{6}; \frac{11}{2} - 2\sqrt{6}\right)$ a $\mathrm{P}_1 = \left(3 + \sqrt{6}; \frac{11}{2} + 2\sqrt{6}\right)$.

Příklad č. 7: Jakou hodnotu musí mít c, aby se přímka $p: 3x + 4y + c = 0$ dotýkala kuželosečky $x^2 + y^2 = 25$. Určete druh a základní prvky kuželosečky. V případě paraboly to jsou: souřadnice vrcholu a ohniska, poloha paraboly, směr osy, rovnice řídící přímky a velikost parametru. V případě elipsy to jsou: souřadnice středu a obou ohnisek, velikost hlavní a vedlejší poloosy a excentricity, poloha elipsy (směr hlavní osy). V případě hyperboly to jsou: souřadnice středu a obou ohnisek, velikost hlavní a vedlejší poloosy a excentricity, poloha hyperboly (směr hlavní osy) a rovnice asymptot. V případě kružnice jsou to souřadnice středu a poloměr.

Řešení: Obecná rovnice kuželosečky je již ve středovém tvaru a jedná se o kružnici s poloměrem $r = 5$ a se středem $\mathrm{S} = (0; 0)$. Jestliže vyšetřujeme vzájemnou polohu přímky a kuželosečky, tak dosadíme obecnou rovnici přímky do rovnice kuželosečky, čímž získáme kvadratickou rovnici. Aby přímka p byla tečnou kružnice, musí tato kvadratická rovnice mít právě jeden dvojnásobný kořen. Nejprve si vyjádříme například x z rovnice přímky p $x = \frac{-4y - c}{3}$ a dosadíme do rovnice kružnice, dostáváme: $\frac{16y^2 + 8yc + c^2}{9} + y^2 = 25$ a po úpravě $25y^2 + 8yc + c^2 - 225 = 0$. Tato kvadratická rovnice musí mít právě jeden dvojnásobný kořen, a proto její diskriminant musí být roven nule $D = 64c^2 - 4 \cdot 25(c^2 - 225) = 0 \Rightarrow -36c^2 + 22\,500 = 0 \Rightarrow c^2 = 625 \Rightarrow c = \pm 25$.

Úloha má celkem dvě řešení a přímka p je tečnou ke kružnici právě tehdy když je $c = 25$ nebo $c = -25$.

Příklad č. 8: Napište obecnou rovnici kružnice (ne ve středovém tvaru), jestliže prochází body $A = (2;1), B = (1;4), C = (6;9)$. Určete její střed a poloměr.

Řešení: Střed hledané kružnice je průsečík os úseček AB a BC. Pro střed P_1 úsečky AB platí: $P_1 = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$, normálový vektor osy o_1 je směrovým vektorem přímky AB, proto $\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{AB} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2) = (-1; 3)$a obecná rovnice osy o_1 je $-x + 3y + c_1 = 0$ a po dosazení například bodu A je $c_1 = -6$ a $o_1 : -x + 3y - 6 = 0$. Obdobně pro střed P_2 úsečky BC platí: $P_2 = \left(\frac{b_1 + c_1}{2}; \frac{b_2 + c_2}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}; \frac{13}{2}\right)$, normálový vektor osy o_2 je směrovým vektorem přímky BC, proto $\boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{BC} = (c_1 - b_1; c_2 - b_2) = (5;5) = (1;1)$a obecná rovnice osy o_2 je $x + y + c_2 = 0$ a po dosazení například bodu B je $c_2 = -10$ a $o_2 : x + y - 10 = 0$. Nyní vyřešíme soustavu rovnic:

$$
\begin{aligned}
-x + 3y - 6 &= 0 \\
x + y - 10 &= 0
\end{aligned}
$$

a dostáváme souřadnice středu $S = (6;4)$. Poloměr hledané kružnice je roven vzdálenosti středu S od libovolného ze tří bodů A, B, C. Vezmeme-li bod A pak dostáváme: $r = |AS| = |(4;3)| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$. Středový tvar kružnice je $(x-6)^2 + (y-4)^2 = 25$.

Hledaná obecná rovnici kružnice je $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 27 = 0$.

Poznámka: Tuto úlohu lze také formulovat takto: Určete obecnou rovnici (ne středový tvar) kružnice opsané trojúhelníku ABC, jestliže $A = (2;1), B = (1;4), C = (6;9)$. Určete její střed a poloměr.

Příklad č. 9: Napište rovnici hyperboly, která má vrcholy v ohniskách a ohniska ve vrcholech elipsy, jejíž rovnice je $9x^2 + 16y^2 = 144$.

Řešení: Středový tvar rovnice elipsy je $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Střed obou kuželoseček je shodný a je $S = (0;0)$. Hlavní poloosa elipsy má velikost $a = 4$, vedlejší $b = 3$, excentricita $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$. Hyperbola má tedy hlavní poloosu $a = \sqrt{7}$, vedlejší $b = 3$, excentricita $e = 4$. Její rovnice ve středovém tvaru je proto $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$ a obecná rovnice má tvar $9x^2 - 7y^2 = 63$.

Rovnice hyperboly, která má vrcholy v ohniskách a ohniska ve vrcholech elipsy je $9x^2 - 7y^2 = 63$.

Příklad č. 10: Napište obecnou rovnici kolmice k k přímce $p : 2x - 3y - 4 = 0$ tak, aby procházela ohniskem elipsy $25x^2 + 9y^2 = 100$. Vypočítejte obsah obdélníka, který je této elipse opsán a úhel, který svírá kolmice *k* s hlavní osou elipsy.

Řešení: Středový tvar elipsy je $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{100}{9}} = 1$. Jedná se tedy o elipsu s hlavní osou rovnoběžnou s osou *y*, velikost hlavní poloosy $a = \frac{10}{3}$, vedlejší $b = 2$, excentricita $e=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{\frac{100}{9}-4}=\sqrt{\frac{64}{9}}=\frac{8}{3}$, střed $\mathrm{S}=(0;0)$, ohniska $\mathrm{F}_1=\left(0;\frac{8}{3}\right)$ a $\mathrm{F}_2=\left(0;-\frac{8}{3}\right)$. Kolmice k přímce p procházející ohniskem elipsy jsou tedy dvě k_1 a k_2, které jsou navzájem rovnoběžné a mají proto stejný normálový vektor $\boldsymbol{n}=(3;2)$, který je shodný se směrovým vektorem přímky p a je kolmý k normálovému vektoru přímky p. Kolmice $k_1: 3x+2y+c_1=0$ a $k_2: 3x+2y+c_2=0$, po dosazení příslušného ohniska pak dostáváme: $c_1=-\frac{16}{3}$ a $c_2=\frac{16}{3}$ a konečně $k_1: 9x+6y-16=0$ a $k_2: 9x+6y+16=0$. Obdélník, který je elipse opsán má jednu stranu rovnu délce hlavní osy a druhou vedlejší osy a proto $P=2a\cdot 2b=4\cdot\frac{20}{3}=\frac{80}{3}\approx 26{,}67$. Úhel, který svírá hlavní osa elipsy s kolmicí k_1 je shodný úhlu, který svírá s kolmicí k_2 (jsou rovnoběžné) a je definován jako ostrý úhel, který tyto dvě přímky spolu svírají, tj. je roven ostrému úhlu jejich směrových vektorů. Směrový vektor osy je $(0;1)$ a kolmic $(2;-3)$. Proto $\cos\varphi=\frac{|(0;1)\cdot(2;-3)|}{\sqrt{0+1}\cdot\sqrt{4+9}}=\frac{3}{\sqrt{13}}\approx 0{,}832\,05 \Rightarrow \varphi=33{,}69° = 33°\,41'$.

Úloha má dvě řešení a $k_1: 9x+6y-16=0$ a $k_2: 9x+6y+16=0$ .Obsah obdélníka, který je této elipse opsán měří 26,67 jednotek čtverečných a úhel, který svírá kolmice k s hlavní osou elipsy je 33° 41′.

Příklad č. 11: Uvnitř kružnice $x^2-2x+y^2+4y-20=0$ leží bod $\mathrm{P}=\left(\frac{7}{2};-\frac{9}{2}\right)$. Tímto bodem veďte sečnu, která danou kružnici protíná v bodech A, B, pro které platí $|\mathrm{AP}|=|\mathrm{BP}|$. Určete obecnou rovnici této sečny a vypočítejte její délku.

Řešení: Bod P půlí tětivu AB a proto kolmice vedená bodem P k přímce AB musí procházet středem kružnice S. Abychom tedy nalezli obecnou rovnici tětivy AB, stačí vést bodem P kolmici na přímku SP. Nejprve si určíme střed kružnice S tak, že upravíme obecnou rovnici kružnice na středový tvar $(x-1)^2+(y+2)^2=25$. Střed $\mathrm{S}=(1;-2)$. Směrový vektor $\boldsymbol{SP}=(p_1-s_1;\,p_2-s_2)=\left(\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right)=(1;-1)$je normálovým vektorem hledané tětivy a tedy má rovnici $x-y+c=0$, po dosazení bodu P pak obdržíme hledanou rovnici tětivy $x-y-8=0$. Abychom stanovili její délku, musíme vypočítat souřadnice bodů A, B, což jsou průsečíky tětivy s kružnicí. Z rovnice tětivy si vyjádříme například $x=y+8$ a dosadíme do rovnice kružnice $(x-1)^2+(y+2)^2=25$, dostáváme rovnici

$y^2+14y+49+y^2+4y+4=25 \Rightarrow y^2+9y+14=0 \Rightarrow (y+7)(y+2)=0 \Rightarrow$

$y_1=-7 \wedge y_2=-2$ a odtud $\mathrm{A}=(1;-7)$ a $\mathrm{B}=(6;-2)$. Vzdálenost těchto dvou bodů je $|\boldsymbol{AB}|=|(5;5)|=5\sqrt{2}$.

Délka tětivy je $5\sqrt{2}\approx 7{,}05$ a její obecná rovnice je $x-y-8=0$.

Příklad č. 12: Napište obecnou rovnici přímky, která prochází vrcholem paraboly $2x^2 + y - x = 2$ a s přímkou $p: x - 3y - 6 = 0$ svírá úhel $\frac{\pi}{4}$.

Řešení: Nejprve upravíme obecnou rovnici paraboly na vrcholový tvar $2\left(x^2 - \frac{x}{2}\right) + y = 2 \Rightarrow 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} = 2 - y \Rightarrow 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = -y + \frac{17}{8} \Rightarrow$ $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = -\frac{1}{2}\left(y - \frac{17}{8}\right) \Rightarrow \mathrm{V} = \left(\frac{1}{4}; \frac{17}{8}\right)$. Směrový vektor $\boldsymbol{s}$ přímky p má souřadnice $\boldsymbol{s} = (3; 1)$. Nyní nalezneme vektor $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$, který svírá s vektorem $\boldsymbol{s}$ úhel $\frac{\pi}{4}$ a který bude směrovým vektorem hledané přímky. Víme, že $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a tedy po dosazení do vzorce $\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{s}| \cdot |\boldsymbol{u}|}$ dostáváme rovnici $\frac{3u_1 + u_2}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{u_1^2 + u_2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, kterou upravíme na tvar $2u_1^2 + 3u_1u_2 - 2u_2^2 = 0$, zvolíme např. $u_2 = 1$ a dostaneme kvadratickou rovnici $2u_1^2 + 3u_1 - 2 = 0$, kterou vyřešíme a získáme dva různé reálné kořeny $u_1 = -2$ a $u_1' = \frac{1}{2}$. Hledané směrové vektory jsou tedy dva $\boldsymbol{u} = (-2; 1)$ a $\boldsymbol{u}' = \left(\frac{1}{2}; 1\right) = (1; 2)$. Hledané přímky proto budou také dvě a jejich normálové vektory budou mít souřadnice $\boldsymbol{n} = (1; 2)$ a $\boldsymbol{n} = (2; -1)$, jejich obecné rovnice budou $q: x + 2y + c = 0$ a $q': 2x - y + c' = 0$, po dosazení souřadnic vrcholu V pak dostáváme $q: x + 2y - \frac{9}{2} = 0$ a $q': 2x - y + \frac{13}{8} = 0$ a po úpravě $q: 2x + 4y - 9 = 0$ a $q': 16x - 8y + 13 = 0$.

Obecné rovnice přímek, které procházejí vrcholem paraboly a s přímkou p svírají úhel $\frac{\pi}{4}$ jsou $q: 2x + 4y - 9 = 0$ a $q': 16x - 8y + 13 = 0$.

Příklad č. 13: Napište obecnou rovnici elipsy, jejíž hlavní poloosa má stejnou délku jako je poloměr kružnice $-2x^2 + 12x - 2y^2 + 8y + 24 = 0$, délka vedlejší poloosy je rovna parametru paraboly $x^2 - 4x + 4y + 8 = 0$ a střed S je průsečík přímek *p*, *q*, kde $p: 3x + 2y - 17 = 0$ a $q: 2x - 3y + 19 = 0$.

Řešení: Abychom mohli napsat rovnici elipsy, musíme nejprve nalézt její určující prvky a proto nejprve uvedeme na středový tvar obecnou rovnici kružnice a dostaneme $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$. Odtud vyplývá, že délka hlavní poloosy elipsy $a = 5$, protože poloměr kružnice $r = 5$. Nyní uvedeme na vrcholový tvar obecnou rovnici paraboly a dostaneme rovnici $(x-2)^2 = -4(y+1)$. Odtud vyplývá, že délka vedlejší osy elipsy $b = 2$, protože parametr paraboly $p = 2$. Souřadnice středu *S* získáme vyřešením soustavy rovnic

$$3x + 2y - 17 = 0$$
$$2x - 3y + 19 = 0$$

a je tedy $\mathrm{S} = (1; 7)$. Protože v zadání úlohy není určena poloha hlavní osy, tak řešením jsou elipsy dvě, jedna, která má hlavní osu rovnoběžnou s osou *x* a druhá, která má hlavní osu rovnoběžnou s osou *y*. Jejich středové rovnice jsou: $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-7)^2}{4}=1$ a $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-7)^2}{25}=1$.

Úloha má dvě řešení a obecná rovnice hledané elipsy je $4x^2+25y^2-8x-350y+1129=0$ a $25x^2+4y^2-50x-56y+121=0$.

8 Příklady k procvičení v E_3

Příklad č. 1: Čtyřstěn je dán vrcholy $A=(1;1;0), B=(-1;1;-1), C=(-2;3;-1), D=(0;6;-2)$.
Určete: a) objem čtyřstěnu ABCD,
b) obsah stěny ABC,
c) tělesovou výšku na stěnu ABC.

Řešení: a) Objem čtyřstěnu $V=\frac{11}{6}$.

b) Obsah stěny ABC je $P=\frac{\sqrt{21}}{2}$.

c) Tělesová výška na stěnu ABC je $v=\frac{11\sqrt{21}}{21}$.

Příklad č. 2: Jsou dány body $A=(2;-1;0), B=(3;1;-1), C=(2;-2;2), D=(2;-2;4)$ a rovina $\rho: 2x-y+z-4=0$. Určete:
a) rovnici roviny σ procházející body ABC,
b) vzdálenost bodu D od roviny ρ,
c) bodem D veďte rovinu τ procházející průsečnicí rovin ρ a σ.

Řešení: a) Rovnice roviny σ procházející body ABC je $3x-2y-z-8=0$.
b) Vzdálenost bodu D od roviny ρ je $v=\sqrt{6}$.
c) Rovina τ procházející průsečnicí rovin ρ i σ a bodem D má rovnici $11x-7y-2z-28=0$.

Příklad č. 3: Jsou dány body $A=(1;3;2), B=(3;1;6)$ a přímka $p: x=s; y=1-2s; z=s+1; s\in R$. Určete:
a) rovnici přímky q procházející body AB,
b) rozhodněte o vzájemné poloze přímek *p*, *q*,
c) jsou-li různoběžky, stanovte jejich průsečík a úhel, ve zbylých případech jejich vzdálenost.

Řešení: a) Parametrické rovnice přímky *q*:
$$x=1+t,\quad y=3-t,\quad z=2+2t,\qquad t\in R.$$
b) Přímky *p*, *q* jsou mimoběžné.

c) Vzdálenost mimoběžných přímek *p*, *q* je $v=\frac{4\sqrt{11}}{11}$.

Příklad č. 4: Je dán bod $\mathrm{A} = (-1; -1; 0)$ a přímka

$p: \frac{x-2}{3} = -\frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$. Určete:

a) obecnou rovnici roviny ρ procházející bodem A kolmo k přímce *p*,

b) nalezněte vzdálenost bodu A od přímky *p*,

c) napište rovnici kolmice *q* spuštěné s bodu A na přímku *p*.

Řešení: a) Obecná rovnice roviny ρ procházející bodem A kolmo k přímce *p* je

$\rho: 3x - y + z + 2 = 0$.

b) Vzdálenost bodu A od přímky *p* je $v = \frac{3\sqrt{22}}{11}$.

c) Rovnici kolmice *q* spuštěné s bodu A na přímku *p* jsou:

$$\begin{aligned} x &= -1 + 2t, \\ y &= -1 + 3t, \quad t \in \mathrm{R}. \\ z &= \quad\ -3t, \end{aligned}$$

Příklad č. 5: Jsou dány přímky $p: \frac{x+1}{4} = \frac{3-y}{5} = \frac{z-4}{1}$ a q:

$$\begin{aligned} x &= 2 + s, \\ y &= 1 - 3s, \quad s \in \mathrm{R}. \\ z &= -2 + 7s, \end{aligned}$$

Určete:

a) parametrické rovnice přímky *p*,

b) rozhodněte o vzájemné poloze přímek *p*, *q*,

c) jsou-li různoběžky, stanovte jejich průsečík a úhel, ve zbylých případech jejich vzdálenost.

Řešení: a) Parametrické rovnice přímky *p*:

$$\begin{aligned} x &= -1 + 4t, \\ y &= 3 - 5t, \quad t \in \mathrm{R}. \\ z &= 4 + t, \end{aligned}$$

b) Přímky *p*, *q* jsou různoběžné.

c) Průsečík přímek *p*, *q* je $\mathrm{R} = (3; -2; 5)$ a úhel, který přímky svírají je $\varphi \doteq 58^\circ\, 31'$.

Příklad č. 6: Jsou dány roviny $\rho: 2x - 2y + z - 12 = 0$ a $\sigma: 2x - 2y + z - 3 = 0$, body $\mathrm{A} = (2; 1; 6), \mathrm{B} = (4; -2; 0), \mathrm{C} = (3; 3; 3)$ a přímka r:

$$\begin{aligned} x &= 3 - 2t, \\ y &= 5, \quad t \in \mathrm{R}. \\ z &= 4 + t, \end{aligned}$$

a) Určete vzdálenost daných dvou rovin ρ a σ,

b) napište obecnou rovnici roviny $\tau = \mathrm{ABC}$,

c) vypočítejte úhel přímky *r* s rovinou $\tau = \mathrm{ABC}$.

Řešení: a) Vzdálenost daných rovin ρ a σ je $v = 3$.

b) Obecná rovnice roviny $\tau: 3x + z - 12 = 0$.

c) Úhel, který svírá přímka *r* s rovinou $\tau = \mathrm{ABC}$ je $\varphi = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$.

Příklad č. 7: Jsou dány mimoběžky *p*, *q*. Určete délku příčky těchto dvou mimoběžek procházející bodem $\mathrm{M} = (2; -2; 5)$, jestliže *p*: $x = t+1$, $y = -t$, $z = t$, *q*: $x = -u+2$, $y = u+1$, $z = -2u+1$, $t, u \in \mathrm{R}$.

Řešení: Délka příčky mimoběžek *p*, *q* procházející bodem M je $v = 2\sqrt{65}$.

Příklad č. 8: Jsou dány mimoběžky *p*, *q*. Určete délku příčky těchto dvou mimoběžek rovnoběžnou se směrem $\boldsymbol{s} = (1; 1; 1)$, jestliže:

p: $x = t$, $y = -t$, $z = 6$, *q*: $x = -u$, $y = 2u$, $z = u$, $t, u \in \mathrm{R}$.

Řešení: Délka příčky mimoběžek *p*, *q* , která je rovnoběžná s přímkou s je $v = 6\sqrt{3}$.

Příklad č. 9: Rovnoběžnostěn je dán vektory $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \boldsymbol{e} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k};$.
Určete:
a) objem rovnoběžnostěnu,
b) obsah stěny určené vektory $\boldsymbol{a}; \boldsymbol{e}$,
c) tělesovou výšku na stěnu $\boldsymbol{a}; \boldsymbol{e}$.

Řešení: a) Objem rovnoběžnostěnu $V = 25$.
b) Obsah stěny $\boldsymbol{a}; \boldsymbol{e}$ je $P = \sqrt{138}$.
c) Tělesová výška na stěnu $\boldsymbol{a}; \boldsymbol{e}$ je $v = \dfrac{25\sqrt{138}}{138}$.

Příklad č. 10: Vypočítejte obsah trojúhelníka ABC a jeho výšku na stranu AB, jestliže $\mathrm{A} = (5; 1; 3), \mathrm{B} = (3; 1; 2), \mathrm{C} = (1; 1; 2)$. Určete rovnici roviny, která prochází bodem $\mathrm{D} = (-1; -1; 2)$ a je kolmá k rovinám $\rho : x - 2y + z - 4 = 0$ a $\sigma : x + 2y - 2 + 4 = 0$.

Řešení: Obsah trojúhelníka ABC je $P = 1$. Výška na stranu AB je $v = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. Obecná rovnice roviny, která prochází bodem D a je kolmá k rovinám $\rho; \sigma$ je $\tau : 2x + 3y + 4z - 3 = 0$.

Příklad č. 11: Vypočítejte vnitřní úhly trojúhelníka ABC, jestliže $\mathrm{A} = (1; 2; 3), \mathrm{B} = (3; -1; 2), \mathrm{C} = (-1; 3; 1)$

Řešení: Úhly mají tyto velikosti: $\alpha \doteq 16°28'; \beta \doteq 27°52'; \gamma \doteq 35°40'$.

Příklad č. 12: Je dán bod $\mathrm{A} = (-1; 0; 1)$ a přímka $p : 3x + y - 5z + 10 = 0 \wedge x + 2y - z - 2 = 0$.
Určete:
a) parametrické rovnice přímky *p*,
b) obecnou rovnici roviny ρ procházející bodem *A* a přímkou *p*,
c) vzdálenost bodu A od přímky *p*,
d) obecnou rovnici roviny τ kolmé k přímce *p* a procházející bodem A,
e) parametrické rovnice kolmice *k* spuštěné s bodu A na přímku *p* a ležící v rovině ρ.

Řešení: a) Parametrické rovnice přímky *p*:

$$x = 1 + 9t,\quad y = 2 - 2t,\quad z = 3 + 5t,\quad t \in \mathrm{R}.$$

b) Rovnice roviny ρ procházející bodem A a přímkou *p* je
$\rho : 7x + 4y - 11z + 18 = 0$.

c) Vzdálenost bodu A od přímky *p* je $v = 2\sqrt{\frac{93}{55}}$.

d) Rovnici roviny τ kolmé k přímce *p* a procházející bodem A je $\tau : 9x - 2y + 5z + 4 = 0$.

e) Parametrické rovnice kolmice *k* spuštěné s bodu A na přímku *p* a ležící v rovině ρ jsou:

$$x = -1 + s,\quad y = 67s,\quad z = 1 + 25s,\quad s \in \mathrm{R}.$$

9 Příklady k procvičení v E_2

Příklad č. 1: ;Napište obecnou rovnici kružnice (ne ve středovém tvaru), která má průměr AB. Určete její střed a poloměr, jestliže $A = (-1; 2), B = (3; -4)$.

Řešení: Obecná rovnice kružnice se středem $S = (1; -1)$ a poloměrem $r = \sqrt{13}$ je $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 11 = 0$.

Příklad č. 2: Napište obecnou rovnici paraboly (ne ve středovém tvaru), která prochází bodem $X = (2; 0)$, jestliže její osa je rovnoběžná se souřadnicovou osou *x* a vrchol $V = (1; 2)$. Určete její ohnisko a rovnici řídící přímky.

Řešení: Obecná rovnice paraboly je $y^2 - 4y - 4x + 8 = 0$, její ohnisko $F = (2; 2)$a rovnice řídící přímky je $x = 0$.

Příklad č. 3: Určete druh a základní prvky kuželosečky $x^2 + 4y^2 - 10x + 8y - 13 = 0$. V případě paraboly to jsou: souřadnice vrcholu a ohniska, poloha paraboly, směr osy, rovnice řídící přímky a velikost parametru. V případě elipsy to jsou: souřadnice středu a obou ohnisek, velikost hlavní a vedlejší poloosy a excentricity, poloha elipsy (směr hlavní osy). V případě hyperboly to jsou: souřadnice středu a obou ohnisek, velikost hlavní a vedlejší poloosy a excentricity, poloha hyperboly (směr hlavní osy) a rovnice asymptot. V případě kružnice jsou to souřadnice středu a poloměr.

Řešení: Jedná se o elipsu s hlavní osou rovnoběžnou s osou *x*, velikost hlavní poloosy $a = 4$, vedlejší $b = 2$, excentricita $e = 2\sqrt{3}$, střed $S = (5; -1)$, ohniska $F_1 = (5 + 2\sqrt{3}; -1)$ a $F_2 = (5 - 2\sqrt{3}; -1)$.

Příklad č. 4: Určete druh a základní prvky kuželosečky $x^2 - y^2 + 6x + 4y - 4 = 0$. V případě paraboly to jsou: souřadnice vrcholu a ohniska, poloha paraboly, směr osy, rovnice řídící přímky a velikost parametru. V případě elipsy to jsou: souřadnice středu a obou ohnisek, velikost hlavní a vedlejší poloosy a excentricity, poloha elipsy (směr hlavní osy). V případě hyperboly to jsou: souřadnice středu a obou ohnisek, velikost hlavní a vedlejší poloosy a excentricity, poloha hyperboly (směr hlavní osy) a rovnice asymptot. V případě kružnice jsou to souřadnice středu a poloměr.

Řešení: Jedná se o rovnoosou hyperbolu s hlavní osou rovnoběžnou s osou *x*, velikost hlavní poloosy $a = 3$, vedlejší $b = 3$, excentricita $e = 3\sqrt{2}$, střed $\mathrm{S} = \left(-3; 2\right)$, ohniska $\mathrm{F}_1 = \left(-3 + 3\sqrt{2}; 2\right)$ a $\mathrm{F}_2 = \left(-3 - 3\sqrt{2}; 2\right)$. Asymptoty mají rovnice $x - y + 5 = 0$ a $x + y + 1 = 0$.

Příklad č. 5: Napište obecnou rovnici přímky procházející středem kuželosečky $3x^2 - y^2 + 6x = 0$ a bodem $\mathrm{P} = \left(?; 0\right)$, který na kuželosečce leží. Nalezněte všechna řešení a určete druh a základní prvky kuželosečky. V případě paraboly to jsou: souřadnice vrcholu a ohniska, poloha paraboly, směr osy, rovnice řídící přímky a velikost parametru. V případě elipsy to jsou: souřadnice středu a obou ohnisek, velikost hlavní a vedlejší poloosy a excentricity, poloha elipsy (směr hlavní osy). V případě hyperboly to jsou: souřadnice středu a obou ohnisek, velikost hlavní a vedlejší poloosy a excentricity, poloha hyperboly (směr hlavní osy) a rovnice asymptot. V případě kružnice jsou to souřadnice středu a poloměr.

Řešení: Jedná se o hyperbolu s hlavní osou rovnoběžnou s osou *x*, velikost hlavní poloosy $a = 1$, vedlejší $b = \sqrt{3}$, excentricita $e = 2$, střed $\mathrm{S} = \left(-1; 0\right)$, ohniska $\mathrm{F}_1 = \left(1; 0\right)$ a $\mathrm{F}_2 = \left(-3; 0\right)$. Rovnice asymptot jsou $\sqrt{3}x - y + \sqrt{3} = 0$ a $\sqrt{3}x + y + \sqrt{3} = 0$. Existují dva body $\mathrm{P} = \left(0; 0\right)$ a $\mathrm{P}' = \left(-2; 0\right)$, ale pouze jedna přímka $p: y = 0$, protože na ní leží oba body P.

Příklad č. 6: Vyšetřete vzájemnou polohu přímky $p = \mathrm{AB}$, kde $\mathrm{A} = \left(5; -1\right), \mathrm{B} = \left(-3; -7\right)$ a kuželosečky $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$. Určete druh a základní prvky kuželosečky. V případě paraboly to jsou: souřadnice vrcholu a ohniska, poloha paraboly, směr osy, rovnice řídící přímky a velikost parametru. V případě elipsy to jsou: souřadnice středu a obou ohnisek, velikost hlavní a vedlejší poloosy a excentricity, poloha elipsy (směr hlavní osy). V případě hyperboly to jsou: souřadnice středu a obou ohnisek, velikost hlavní a vedlejší poloosy a excentricity, poloha hyperboly (směr hlavní osy) a rovnice asymptot. V případě kružnice jsou to souřadnice středu a poloměr.

Řešení: Jedná se o kružnici se středem $\mathrm{S} = \left(2; 3\right)$ a poloměrem $r = 5$. Přímka je tečnou kružnice s bodem dotyku $\mathrm{T} = \left(5; -1\right)$.

Příklad č. 7: Určete průnik následujících křivek a určete tyto křivky, jestliže jejich rovnice jsou $x^2 + y^2 = 25$ a $x - 3y + 9 = 0$.

Řešení: Jedná se o kružnici se středem $\mathrm{S} = \left(0; 0\right)$ a poloměrem $r = 5$ a o přímku. Přímka je sečnou kružnice s protíná ji v bodech $\mathrm{X} = \left(3; 4\right)$ a $\mathrm{X}' = \left(-4{,}8; 1{,}4\right)$.

Příklad č. 8: Napište obecnou rovnici kružnice (ne ve středovém tvaru), jestliže prochází body $\mathrm{A} = \left(1; 3\right), \mathrm{B} = \left(4; 1\right), \mathrm{C} = \left(-1; -4\right)$. Určete její střed a poloměr.

Řešení: Obecná rovnice kružnice je $5x^2 + 5y^2 - 7x + 7y - 64 = 0$, její střed je $\mathrm{S} = \left(\frac{7}{10}; -\frac{7}{10}\right)$ a poloměrem $r = \frac{\sqrt{1378}}{10}$.

Příklad č. 9: Určete asymptoty hyperboly $4y^2-9x^2-54x+8y-113=0$ a vzdálenost bodu $\mathrm{D}=(3;5)$ od obou asymptot.

Řešení: Asymptoty mají rovnice $3x-2y+7=0$ a $3x+2y+11=0$ a vzdálenosti jsou $v=\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$ a $v'=\dfrac{30\sqrt{13}}{13}$.

Příklad č. 10: Vypočítejte vzdálenost ohniska kuželosečky $9x^2-54x-16y^2+64y-127=0$ od přímky $p=\mathrm{AB}$, jestliže $\mathrm{A}=(1;1), \mathrm{B}=(3;7)$. Určete charakteristické prvky kuželosečky.

Řešení: Jedná se tedy o hyperbolu s hlavní osou rovnoběžnou s osou *x*, velikost hlavní poloosy $a=4$, vedlejší $b=3$, excentricita $e=5$, střed $\mathrm{S}=(3;2)$, ohniska $\mathrm{F}_1=(-2;2)$ a $\mathrm{F}_2=(8;2)$. Rovnice asymptot jsou $3x-4y-1=0$ a $3x+4y-17=0$. Vzdálenost přímky *p* od ohniska F_1 je $v=\sqrt{10}$ a vzdálenost přímky *p* od ohniska F_2 je $v=2\sqrt{10}$.

Příklad č. 11: Hlavními vrcholy kuželosečky $4x^2-9y^2-8x+36y-68=0$ veďte přímky k_1 a k_2, které jsou kolmé k přímce $p: 3x+4y-5=0$.

Řešení: Kuželosečka je hyperbola se středem $\mathrm{S}=(1;2)$, hlavní poloosou $a=3$, vedlejší poloosou $b=2$ a s hlavní osou rovnoběžnou s osou *x*. Proto souřadnice vrcholu jsou $\mathrm{A}=(4;2), \mathrm{B}=(-2;2)$. Rovnice hledaných kolmic jsou přímky $k_1: 4x-3y-10=0$ a $k_2: 4x-3y+14=0$.

Příklad č. 12: Vypočítejte souřadnice těžiště trojúhelníka ABC, jestliže $\mathrm{A}=(1;1), \mathrm{B}=(3;0), \mathrm{C}=(-2;5)$ a napište obecnou rovnici kružnice (ne ve středovém tvaru), která má střed v těžišti a poloměr *r* je roven $\dfrac{1}{3}$ délky těžnice spuštěné s vrcholu C.

Řešení: Těžiště má souřadnice $\mathrm{T}=\left(\dfrac{2}{3};2\right)$ a obecná rovnice kružnice je $324x^2+324y^2-432x-1\,296y+1\,295=0$.

Příklad č. 13: Napište obecnou rovnici paraboly (ne ve vrcholovém tvaru), která má hlavní osu rovnoběžnou s osou *y*, vrcholem $\mathrm{V}=(1;2)$ je otočena dolů a parametr je roven vzdálenosti bodu $\mathrm{Q}=(4;3;0)$ od roviny trojúhelníka ABC, kde $\mathrm{A}=(1;3;0), \mathrm{B}=(4;-1;2), \mathrm{C}=(3;0;1)$.

Řešení: Vzdálenost bodu Q od roviny trojúhelníka ABC je $v=\sqrt{6}$ a obecná rovnice paraboly je $2\sqrt{6}x^2-y-4\sqrt{6}x+2\left(\sqrt{6}+1\right)=0$.