Polynomy

Definice 1. *Komplexním (reálným) polynomem stupně n rozumíme výraz tvaru*

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

kde $a_n \neq 0$ a $a_0, \ldots, a_n$ jsou komplexní (reálná) čísla. Kořenem polynomu $P_n(x)$ rozumíme číslo c takové, že dosadíme-li do výrazu $P_n(x)$ za x číslo c, dostaneme 0. Píšeme $st(P_n) = n$.

Případ $n = 0$ odpovídá komplexním (reálným) číslům (hovoříme též o konstantních polynomech), případ $n = 1$ odpovídá lineárním dvojčlenům $ax + b$ a případ $n = 2$ odpovídá kvadratickým trojčlenům $ax^2 + bx + c$.

Věta 1. *Nechť $f(x)$ je libovolný polynom a $g(x)$ nekonstantní polynom. Pak existuje právě jedna dvojice polynomů $p(x)$ (tzv. částečný podíl) a $r(x)$ (tzv. zbytek), přičemž $st(r) < st(g)$ splňující*

$$f(x) = p(x) \cdot g(x) + r(x). \tag{1}$$

Jsou-li navíc $f(x)$ a $g(x)$ reálné polynomy, pak i $p(x)$ a $r(x)$ jsou reálné polynomy.

Rovnost (1) lze též psát ve tvaru

$$\frac{f(x)}{g(x)} = p(x) + \frac{r(x)}{g(x)}, \tag{2}$$

která názoreněji vyjadřuje, že se jedná o dělení se zbytkem. Předpoklad $st(r) < st(g)$ je velmi podstatný.

Důkaz lze formálně provést indukcí, ale je v podstatě z zřejmý z procedury v příkladě, když v každém kroku eliminujeme nejvyšší mocninu tak dlouho dokud nedojdeme ke stupni nižšímu než stupeň dělitele.

Příklad 1. $x^5 + x + 1 : (x^2 + 1) = x^3 - x + \frac{2x}{x^2+1}$

$$\begin{array}{l} \underline{-(x^5 + x^3)} \\ \quad -x^3 + x + 1 \\ \quad \underline{-(-x^3 - x)} \\ \qquad\qquad 2x + 1 \end{array}$$

Důsledek 1. *Číslo c je kořenem polynomu $f(x)$ právě když $(x - c)$ dělí $f(x)$ beze zbytku.*

Důkaz: $\Rightarrow$ Z předchozí věty o dělení se zbytkem máme $f(x) = p(x) \cdot (x - c) + q(x)$, kde $r(x)$ musí být konstantní polynom ($st(r) < st(g)$). Dosazením c za x máme $0 = p(x) \cdot 0 + r(x)$ a tedy $r(x) = r = 0$.

$\Leftarrow$ Naopak, nechť $r = 0$. Pak $f(x) = (x - c) \cdot p(x)$ a zřejmě $f(c) = 0$. $\square$

Na základě tohoto Důsledku definujeme pojem násobnosti kořene

Definice 2. *Řekneme, že komplexní (a tedy i reálné) číslo c je k-násobným kořenem polynomu $f(x)$ právě když $(x - c)^k$ dělí $f(x)$ beze zbytku a k je maximální přirozené číslo s touto vlastností. Není-li c kořenem $f(x)$, říkáme, že c má násobnost rovnou nule.*

Příklad 2. *Určete násobnost všech kořenů polynomu $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.*

Polynom upravíme na tvar $f(x) = x^2(x+1) - x - 1 = x^2(x+1) - (x+1) = (x+1)(x^2-1) = (x+1)(x+1)(x-1) = (x+1)^2(x-1)$. Vidíme, že polynom má kořen -1 násobnosti 2 a kořen 1 násobnosti 1.

Základní věta algebry

VĚTA 2. *Každý nekonstantní polynom má alespoň jeden komplexní kořen.*

Poznamenejme, že reálné kořeny nemusí ani u reálných polynomů existovat. Například reálné kvadratické polynomy se záporným didkriminantem nemají reálný kořen. Na základě předchozích úvah o kořenech a jim odpovídajících dělitelů tvaru $(x-c)$ dostáváme jinou formulaci základní věty algebry.

VĚTA 3. *Součet násobností jednotlivých komplexních kořenů je rovný stupni polynomu.*

Ze Základní věty algebry a Důsledku 1 plyne věta, která říká, že polynom lze nad oborem komplexních čísel rozložit (a to jednoznačně až na pořadí činitelů) na součin jednoduchých faktorů.

VĚTA 4. *Polynom $P_n(x)$ stupně n lze nad oborem $\mathbb{C}$ rozložit jednoznačně až na pořadí činitelů na tvar*

$$P_n(x) = a_n(x-x_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots (x-x_k)^{\alpha_k}, \tag{3}$$

kde a_n je koeficient u x^n a $x_1, \ldots, x_k$ jsou komplexní kořeny s násobnostmi $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Poněkud složitější situace nastane, zajímáme-li se o reálné kořeny a rozklady nad oborem $\mathbb{R}$ reálných čísel (samozřejmě reálných polynomů), jinak bychom asi těžko něco rozumného mohli formulovat. Nejprve si připomeňme, že komplexní čísla $a+ib$ a $a-ib$ nazýváme komplexně sdruženými (poznamenejme, že $i = \sqrt{-1}$ je imaginární jednotka. Platí $(x-(a+ib))(x-(a-ib)) = (x-a)^2 - i^2b^2 = (x-a)^2 + b^2$, tedy evidentně nad $\mathbb{R}$ nerozložitelný kvadratický polynom (součet čtverců). Všimněmě si následující vlastnosti reálných polynomů.

VĚTA 5. *Je-li $a+ib$ kořen reálného polynomu $f(x)$, je i komplexně sdružené číslo $a-ib$ jeho kořenem.*

Důkaz: Tvrzení bude dokázáno, ukážeme-li, že kvdaratický polynom $(x-(a+ib))(x-(a-ib))$ dělí polynom $f(x)$ beze zbytku. Podle věty o dělení se zbytkem máme zaručenu existenci *reálných* polynomů $p(x)$ a $r(x)$ (dokonce jednoznačně) takovou, že

$$f(x) = p(x) \cdot (x-(a+ib))(x-(a-ib)) + cx + d, \tag{4}$$

neboť $(x-(a+ib))(x-(a-ib))$ je reálný. Musí tedy být i c, d reálná. Dosazením $a+ib$ máme $0 = f(a+ib) = 0 + c(a+ib) + d$, z čehož vyplývá srovnáním imaginárních složek, že $c = 0$ a odtud pak i $d = 0$. Uvedený kvadratický polynom tedy $f(x)$ dělí beze zbytku, což jsme chtěli dokázat. $\square$

DŮSLEDEK 2. *Každý reálný polynom lze nad oborem $\mathbb{R}$ rozložit jednoznačně až na pořadí činitelů na součin lineárních a kvadratických, nad $\mathbb{R}$ nerozložitelných kvadratických polynomů (tzn. se záporným diskriminantem). Je-li $f(x)$ stupně n, pak tento rozklad je tvaru*

$$f(x) = a_n(x-x_1)^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot (x-x_k)^{\alpha_k} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1} \cdot \cdots \cdot \ldots (x^2+p_lx+q_l)^{\beta_l}, \tag{5}$$

kde $x_1, \dots, x_k$ jsou reálné kořeny násobností $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ a kvadratické polynomy odpovídají dvojicím komplexně sdružených kořenů $a_1 + ib_1, \dots, a_l + ib_l$ násobností $\beta_1, \dots, \beta_l$, přičemž $\alpha_1 + \dots + \alpha_k + 2\beta_1 + \dots + 2\beta_l = n$.

PŘÍKLAD 3. *Rozložte nad obory $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$polynom $x^4 + 1$.*

Platí $x^4 + 1 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2 + 1 - x\sqrt{2})(x^2 + 1 + x\sqrt{2})$, což je úplný rozklad nad $\mathbb{R}$. Je totiž $x^4 + 1$ kladný součet čtverců a tudíž rerálný kořen nemůže existovat. Pokud jde o rozklad nad $\mathbb{C}$, vyřešíme v rozkladu vystupující kvadratické polynomy (se zápornými diskriminanty) a dostaneme $x_{1,2,3,4} = \frac{\pm\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}$, kde kombinace znamének může být libovolná. Rozklad nad $\mathbb{C}$ je pak tvaru $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$ (zde $a_n = a_4 = 1$).

Racionální funkce

DEFINICE 3. *Racionální nebo lomenou funkcí nazveme podíl polynomů $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ stupňů m a n. Je-li $m < n$, hovoříme o ryzí racionální funkci nebo o ryze lomené racionální funkci.*

Je-li $m \geq n$, pak lze provést dělení se zbytkem, $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ tedy upravíme na tvar $p(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$, kde poslední racionální funkce je již ryzí.

VĚTA 6. *Nechť $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ je ryzí racionální funkce, přičemž její úplný rozkladový tvar nad $\mathbb{R}$ je*

$$a_n(x - x_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (x - x_k)^{\alpha_k} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_l x + q_l)^{\beta_l},$$

kde $x_1, \dots, x_k$ jsou reálné kořeny násobností $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ a kvadratické polynomy odpovídají dvojicím komplexně sdružených kořenů $a_1 + ib_1, \dots, a_l + ib_l$ násobností $\beta_1, \dots, \beta_l$, přičemž $\alpha_1 + \dots + \alpha_k + 2\beta_1 + \dots + 2\beta_l = n$.

Pak $f(x)$ je součtem $\alpha_1 + \dots + \alpha_k$ parciálních zlomků 1. typu a $\beta_1 + \dots + \beta_l$ parciálních zlomků 2. typu, kde α-násobnému reálnému kořenu c odpovídá součet α parciálních zlomků 1. typu tvaru

$$\frac{a_1}{x - c} + \frac{a_2}{(x - c)^2} + \dots + \frac{a_\alpha}{(x - c)^\alpha} \tag{6}$$

a β-násobnému kvadratickému faktoru se záporným diskriminantem $x^2 + px + q$ součet β parciálních zlomků 2. typu tvaru

$$\frac{A_1 x + B_1}{x^2 + px + q} + \frac{A_2 x + B_1}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{A_\beta x + B_\beta}{(x^2 + px + q)^\beta}. \tag{7}$$

PŘÍKLAD 4. *Rozložte na parciální zlomky racionální funkci $f(x) = \frac{x^3+1}{x^3-1}$.*

Zřejmě $\frac{x^3+1}{x^3-1}$ není racionální. Po provedení dělení se zbytkem máme $\frac{x^3+1}{x^3-1} = 1 + 2\frac{1}{x^3-1}$, kde $\frac{1}{x^3-1}$ je již ryze lomená. Tu lze rozložit na parciální zlomky. Protože $x^3 - 1$ má úplný rozklad nad $\mathbb{R}$ tvaru $(x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)$, lze $\frac{1}{x^3-1}$ psát ve tvaru

$$\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{1}{(x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)} = \frac{a}{x - 1} + \frac{Ax + B}{x^2 + x + 1}.$$

Vynásobením společným jmenovatelem máme $1 = a \cdot (x^2 + x + 1) + (Ax + B) \cdot (x - 1)$. Dosazením libovolných tří čísel za x nebo pomocí srovnávání koeficientů u stejných mocnim máme: Dosazením $x = 1$ dostaneme $1 = 3a$ a srovnáním koeficientů u x^2 a x máme $0 = a + A$ a $0 = a + A - B$. Tedy $a = \frac{1}{3}$, $A = -\frac{1}{3}$ a $B = 0$. Celkem $f(x) = 1 + \frac{2}{3(x-1)} - \frac{2}{3(x^2+x+1)}$.