Vektorové podprostory

Definice 1. *Nechť V je vektorový prostor a $W \subseteq V$ neprázdná podmnožina. Řekneme, že W je vektorový podprostor vektorového prostoru V, jestliže splňuje*

(i) je-li $\vec{u}, \vec{v} \in W$, pak i $\vec{u} + \vec{v} \in W \forall \vec{u}, \vec{v} \in W$

(ii) je-li $\vec{u} \in W$, je i $c \cdot \vec{u} \in W \forall \vec{u} \in W$ a $c \in \mathbb{R}$.

Vektorové podprostory v $\mathbb{R}^n$ jsou právě přímky, roviny a ,,podprostory" vyšších dimenzí procházející počátkem. Vezmeme-li např. uzavřený jednotkový kruh v $\mathbb{R}^2$, nejedná se o vektorový podprostor, neboť součet vektorů $(1,0)$ a $(0,1)$ rovný vektoru $(1,1)$ nemá konec v jednotkovém kruhu, přestože oba vektory ano. Podobně polopřímka není podprostorem, neboť je porušena druhá podmínka definice, vezmeme-li za c záporné číslo.

Definujme nyní tzv. *lineární obal* podmnožiny $M \subseteq V$ vektorového prostoru V.

Definice 2. *Lineárním obalem podmnožiny $M \subseteq V$ vektorového prostoru V nazveme množinu všech lineárních kombinací vektorů z M, tedy*

$$\mathcal{L}(M) = \{c_1\vec{v}_1 + \ldots, c_n\vec{v}_n; \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in M, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}\}.$$

Velice snadno se dokáže, že $\mathcal{L}(M)$ je vektorový podprostor ve V. Pomomocí dalšího pojmu *báze* se pak ukáže, že všechny vektorové podprostory v konečně-dimensionálních prostorech jsou tvaru $\mathcal{L}(M)$ pro nějakou konečnou podmnožinu $M \subseteq V$.

Příklady: Nechť $V = \mathbb{R}^n$.

(a) $\mathcal{L}(\emptyset) = \left\{\vec{0}\right\}$

(b) $\mathcal{L}\{\vec{u}\}$ je přímka procházející počátkem, jejíž směrový vektor je $\vec{u}$.

(c) $\mathcal{L}\{\vec{u}, \vec{v}\}$ je pro lineárně nezávislé vektory $\vec{u}, \vec{v}$ rovina procházející počátkem se směrovými vektory $\vec{u}, \vec{v}$, v opačné případě přímka procházející počátkem se směrovým vektorem $\vec{u}$ (nebo $\vec{v}$).

Nyní se dostaneme k pojmu *báze* vektorového prostoru.

Definice 3. *Pouslopnost vektorů $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ vektorového prostoru V se nazývá jeho bazí, je-li*

(a) lineárně nezávislá

(b) přidáním libovolného dalšího vektoru již vznikne lineárně závislá posloupnost.

Lze tedy konstatovat, že báze vektorového prostoru je jeho maximální lineárně nezávislou posloupností. Poznamenejme, že posloupnopst vystupující v roli báze může být i nekonečná. V případě její konečnosti říkáme, že V má konečnou dimensi. Je-li V konečné dimense, lze dokázat, že libovolné dvě báze mají tentýž počet vektorů (důkaz je čistě technický a poněkud delší, proto není uváděn). Je tedy korektní definovat následující pojem.

Definice 4. *Dimensí konečně dimensionálního vektorového prostoru V nazýváme počet prvků v jeho bazi.*

Příklady:

(a) v prostoru $\mathbb{R}^n$ je nejjednodušším příkladem báze tzv. kanonická báze $\mathcal{E}$ tvořená vektory $\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \vec{e}_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$.

(b) v prostoru $\mathbb{C}^n$ nad tělesem reálných čísel je posloupnost vektorů $\vec{e}_1 = (1,0,\dots,0), \vec{e}_2 = (0,1,0,\dots,0), \dots, \vec{e}_n = (0,0,\dots,0,1), \vec{e}_{n+1} = (i,0,\dots,0), \vec{e}_{n+2} = (0,i,0,\dots,0), \dots, \vec{e}_{2n} = (0,0,\dots,0,i)$ bazí. Je tedy uvažovaný prostor dimense $2n$.

(c) v prostoru $\mathbb{R}^3$ je bazí např. posloupnost $(1,0,1), (2,1,1), (3,1,1)$ (ověřte).

Definujme nyní pojem souřadnic vektoru vzhledem k bázi vektorového prostoru.

Definice 5. *Nechť $\mathcal{U} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ je báze vektorového prostoru V. Řekneme, že vektor $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ je vektorem souřadnic vektoru $\vec{u}$ vzhledem k bázi $\mathcal{U}$ (píšeme $(\vec{u})_{\mathcal{U}} = \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, jestliže $\vec{u} = \Sigma_{i=1}^n x_i \vec{u}_i$.*

Příklady:

(a) Je-li $V = \mathbb{R}^n$ a vezmeme-li kanonickou bazi $\mathcal{E}$, pak pro libovolný vektor $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ je $(\vec{x})_{\mathcal{E}} = \vec{x}$.

(b) Uvažujme bázi $\mathcal{U} = ((1,0,1), (2,1,1), (3,1,1))$ prostoru $\mathbb{R}^3$ z bodu (c) předchozího příkladu a libovolný vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Pak $(\vec{u})_{\mathcal{U}} = (-u_2 + u_3, -u_1 + 2u_2 + u_3, u_1 - u_2 - u_3)$. Výsledek dostaneme řešením následujícího systému lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & |u_1 \\ 0 & 1 & 1 & |u_2 \\ 1 & 1 & 1 & |u_3 \end{pmatrix}$$

Lineární zobrazení

Lineární zobrazení je vpodstatě zobrazení vektorových prostorů zachovávající strukturu, tzn. lineární kombinace a lineární závislost (ne však lineární nezávislost!). V podstatě se podprostory převádějí na podprostory, např. roviny na roviny či přímky nebo body apod. Dimense obrazu však není větší než dimense zdrojového prostoru, což je vidět třeba z toho, že lineární zobrazení můžou přiřazovat nulový vektor každému vektoru nebo alespoň nějakým vektorům a tím i celému jejich lineárnímu obalu. Je-li však lineární zobrazení bijekcí (t.j. vzájemně jednoznačným zobrazením), hovoříme o lineárním isomorfismu, který již lineární nezávislost zachovává a vpodstatě je jen přeznačením vektorového prostoru (samozřejmě zachovávajícím strukturu). Příklady uvedeme po definici.

Definice 6. *Zobrazení $f : U \to V$ vektorových prostorů se nazývá lineární, jestliže zachovává lineární kombinace, tzn.*

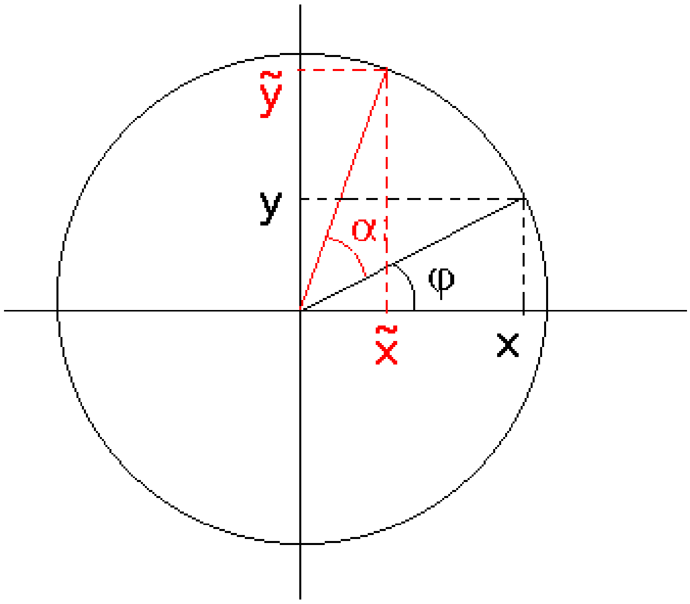
$$f(p \cdot \vec{u} + q \cdot \vec{v}) = p \cdot \vec{u} + q \cdot \vec{v}$$

pro libovolné vektory $\vec{u}, \vec{v} \in U$ a libovolné skaláry $p, q \in \mathbb{R}$. Lineární zobrazení nazýváme isomorfismem, je-li vzájemně jednoznačné (bijektivní).

Poznámka. Definiční vztah lze nahradit ekvivalentně vztahem $f(\Sigma_{i=1}^k p_i \cdot \vec{v}_i) = \Sigma_{i=1}^k p_i \cdot f(\vec{v}_i)$. Lineární zobrazení je tedy úplně zadáno hodnotami na bázových vektorech s tím, že na ostatní vektory se rozšíří pomocí odpovídajících lineárních kombinací.

Příklad. a) definujme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ předpisem $(x,y,z) \mapsto (x,y)$ nebo $(x,y,z) \mapsto (x)$. V prvním případě jde o projekci trojrozměrného číselného vektoru do roviny (x,y), ve druhém o projekci do směru osy x. Lze to interpretovat tak, že vyčíslujeme rovinnou či směrovou složku prostorového vektoru rychlosti $\vec{u} = (x,y,z)$.

b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ předpisem $(x, y, z) \mapsto (x \cos\alpha - y \sin\alpha, y \cos\alpha + x \sin\alpha, z)$, kde α je nějaký pevně zvolený úhel. Jedná se o otočení horizontální složky (rovinné v rovině (x, y)) vektoru rychlosti o úhel α, zatímco vertikální (z-ová) složka zůstává.



Uvedený vztah plyne z následujícího. Platí $\widetilde{x} = r\cos(\varphi+\alpha)$ a $\widetilde{y} = r\sin(\varphi+\alpha)$. Je však $\widetilde{x} = r\cos(\varphi+\alpha) = r(\cos\varphi\cos\alpha - \sin\varphi\sin\alpha) = x\cos\alpha - y\sin\alpha$ a $\widetilde{y} = r\sin(\varphi+\alpha) = r(\sin\varphi\cos\alpha + \cos\varphi\sin\alpha) = y\cos\alpha + x\sin\alpha$.

c) Nechť $\mathcal{U} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ je báze vektorového prostoru V. Definujme zobrazení $f : U \to \mathbb{R}^n$ předpisem

$$\vec{x} \mapsto (\vec{x})_{\mathcal{U}}.$$

Jedná se o lineární isomorfismus $V \to \mathbb{R}^n$ (ověřte!).

Vzhledem k důležitosti tohoto poznatku formulujme tuto větu samostatně.

THEOREM 1. *Nechť V je vektorový prostor konečné dimense a $\mathcal{U} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ je libovolná jeho báze. Pak zobrazení $f = f_{\mathcal{U}} : V \to \mathbb{R}^n$ definované předpisem*

$$\vec{x} \mapsto (\vec{x})_{\mathcal{U}}$$

je lineárním isomorfismem vektorových prostorů V a $\mathbb{R}^n$ (tzv.souřadnicovým isomorfismem).

Poznámka. Tato věta vlastně říká, že všechny vektorové prostory stejné dimense jsou fakticky totéž až na značení, tedy lze je identifikovat s číselnými vektorovými prostory $\mathbb{R}^n$.

Matice přechodu

V příkladě bezprostředně předcházejícím paragraf ,,Lineární zobrazení” jsme vyjadřovali vektory v různých bazích. V mechanice tato potřeba nastane, máme-li např. dva inerciální souřadné systémy a chceme napsat transformační rovnice mezi nimi. Lze k tomu efektivně využít maticový aparát.

Definice 7. *Řekneme, že matice A je maticí přechodu od báze $\mathcal{U} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ k bázi $\mathcal{V} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$, jestliže j-tý sloupec matice A je tvořen vektorem souřadnic $(\vec{u}_j$ vzhledem k bázi $\mathcal{U}$, tedy $A^j = (\vec{u}_j)_{\mathcal{U}}$, značí-li A^j j-tý sloupec matice A.*

Odtud lze odvodit následující. Nechť $(\vec{x})_{\mathcal{U}} = (x_1, \dots, x_n)$, tedy $\vec{x} = \Sigma_{i=1}^n x_i \vec{u}_i$. Chceme-li získat vektor souřadnic vektoru $(\vec{x})_{\mathcal{V}}$ vzhledem k bázi $\mathcal{V}$, máme $(\vec{x})_{\mathcal{V}} = (\Sigma_{j=1}^n x_j \cdot \vec{u}_j)_{\mathcal{V}} =$ (linearita souřadnicového isomorfismu)$= \Sigma_{j=1}^n x_j (\vec{u}_j)_{\mathcal{V}} =$ (definice matice přechodu) $= \Sigma_{j=1}^n x_j \cdot \Sigma_{i=1}^n a_{ij} \cdot \vec{v}_i = \Sigma_{i=1}^n (\Sigma_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j) \cdot \vec{v}_i$ a odtud $(\vec{x})_{\mathcal{V}} = A \cdot (\vec{x})_{\mathcal{U}}$. Označíme-li matici A symbolem $P_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$ naznačujícím přechod od báze $\mathcal{U}$ k bázi $\mathcal{V}$, máme vztah

$$(\vec{x})_{\mathcal{V}} = P_{\mathcal{U}\mathcal{V}} \cdot (\vec{x})_{\mathcal{U}}.$$

Iterováním tohoto vztahu (přechod od $\mathcal{U}$ k $\mathcal{V}$ a poté od $\mathcal{V}$ k $\mathcal{W}$) máme $(\vec{x})_{\mathcal{W}} = P_{\mathcal{V}\mathcal{W}} \cdot (\vec{x})_{\mathcal{V}} = P_{\mathcal{U}\mathcal{V}} \cdot (\vec{x})_{\mathcal{U}}$. Na druhé straně máme $(\vec{x})_{\mathcal{W}} = P_{\mathcal{U}\mathcal{W}} \cdot (\vec{x})_{\mathcal{U}}$. Vzhledem k jednoznačnosti vektoru souřadnic k uvažované bázi anebo vzhledem k libovolné volbě vektorů (např. $(\vec{x})_{\mathcal{U}} = (1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$) máme vztah

$$P_{\mathcal{U}\mathcal{W}} = P_{\mathcal{V}\mathcal{W}} P_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$$

převádějící přechody mezi bázemi na násobení odpovídajících matic přechodu.

Značí-li $\mathcal{E}$ kanonickou bázi, pak $P_{\mathcal{U}\mathcal{E}}$ je matice, která vznikne naskládáním bázových vektorů z $\mathcal{U}$ do sloupců. Dále platí $P_{\mathcal{V}\mathcal{U}} = P_{\mathcal{U}\mathcal{V}}^{-1}$, neboť $P_{\mathcal{U}\mathcal{U}}$ je jednotkovou maticí pro libovolnou bázi $\mathcal{U}$. To mimo jiné znamená, že vyjádření vektorů kanonické báze pomocí vektorů libovolné báze $\mathcal{U}$ dostaneme jako sloupce inverzní matice, která vznikne z matice vzniklé naskládáním vektorů báze $\mathcal{U}$ do sloupců.

Příklad. Nalezněte matici přechodu od báze $\mathcal{U} = (2, 1, 1), (-1, -1, 1), (1, 2, 3)$ k bázi $\mathcal{V} = (1, 0, 1), (2, 1, 2), (1, 0, 2)$.

Platí $P_{\mathcal{U}\mathcal{V}} = P_{\mathcal{E}\mathcal{V}} P_{\mathcal{U}\mathcal{E}}$. Je $P_{\mathcal{U}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ a

$P_{\mathcal{V}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Tedy $P_{\mathcal{E}\mathcal{V}} = P_{\mathcal{V}\mathcal{E}}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Matice lineárních zobrazení

Podobně jako při vyjádřování vektorů v různých bazích jsou vhodným prostředkem matice přechodu, přičemž jejich násobení odpovídá přecházení mezi bázemi, je pro vyjádřování obrazů vektorů v lineárních zobrazeních efektivní používání matic lineárních zobrazení, přičemž skládání lineárních zobrazení odpovídá maticovému násobení.

Nechť $\mathcal{U} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$ je báze vektorového prostoru U a $\mathcal{V} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ báze vektorového prostoru V. Nechť dále $f : U \to V$ je lineární zobrazení. Definujme matici tohoto lineárního zobrazení $\mathcal{L}_{\mathcal{U}\mathcal{V}}^f$ v uvedených bazích následujícím způsobem.

Definice 8. *Řekneme, že matice* $\mathcal{L}^f_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$ *je maticí lineárního zobrazení* $f : U \to V$ *v bazích* $\mathcal{U} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$ *a* $\mathcal{V} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$*, jesliže* j*-tý sloupec matice* $\mathcal{L}^f_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$ *je tvořen vektorem souřadnic* $f(\vec{u}_j)$ *vzhledem k bázi* $\mathcal{V}$*, tedy* $(\mathcal{L}^f)^j_{\mathcal{U}\mathcal{V}} = (f(\vec{u}_j))_{\mathcal{V}}$*, kde index* j *nahoře značí* j*-tý sloupec matice. Jsou-li báze* $\mathcal{U}$ *a* $\mathcal{V}$ *stejné, hovoříme o matici lineárního zobrazení v bázi* $\mathcal{U}$ *(nebo* $\mathcal{V}$*).*

Nyní vyjádříme v bázi $\mathcal{V}$ obraz libovolného vektoru $f(\vec{x})$. Pro zjednodušení symboliky označme dočasně matici lineárního zobrazení $\mathcal{L}^f_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$ symbolem A. Nechť $(\vec{x})_{\mathcal{U}} = (x_1, \dots, x_m)$, tedy $\vec{x} = \Sigma^m_{j=1} x_j \vec{u}_j$. Pak $(f(\vec{x}))_{\mathcal{V}} =$ (za použití linearity f) $= \Sigma^m_{j=1} x_j \cdot (f(\vec{u}_j))_{\mathcal{V}} =$ (definice matice lineárního zobrazení) $= \Sigma^m_{j=1} x_j \cdot \Sigma^n_{i=1} a_{ij} \cdot \vec{v}_i = \Sigma^n_{i=1} (\Sigma^m_{j=1} a_{ij} x_j) \cdot \vec{v}_i$. Píšeme-li tedy opět $\mathcal{L}^f_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$ místo A, máme

$$(f(\vec{x}))_{\mathcal{V}} = \mathcal{L}^f_{\mathcal{U}\mathcal{V}} \cdot (\vec{x})_{\mathcal{U}}.$$

Poznamenejme, že matice lineárního zobrazení má obecně $n = \dim V$ řádků a $m = \dim U$ sloupců, není tedy obecně čtvercová.

Pro skládání lineárních zobrazení platí následující. Je-li $\mathcal{L}^f_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$ matice lineárního zobrazení $f : U \to V$ v bazích $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$ a $\mathcal{L}^g_{\mathcal{V}\mathcal{W}}$ matice lineárního zobrazení $g : V \to W$ v bazích $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$, pak $((g \circ f)(\vec{x}))_{\mathcal{W}} = (g(f(\vec{x}))_{\mathcal{W}} = \mathcal{L}^g_{\mathcal{V}\mathcal{W}} \cdot (f(\vec{x}))_{\mathcal{V}} = \mathcal{L}^g_{\mathcal{V}\mathcal{W}} \cdot \mathcal{L}^f_{\mathcal{U}\mathcal{V}} \cdot (\vec{x})_{\mathcal{U}}$. Na druhé straně máme $((g \circ f)(\vec{x}))_{\mathcal{W}} = \mathcal{L}^{g \circ f}_{\mathcal{U}\mathcal{W}} \cdot (\vec{x})_{\mathcal{U}}$. Užitím stejných argumentů jako u matic přechodu dostaneme

$$\mathcal{L}^{g \circ f}_{\mathcal{U}\mathcal{W}} = \mathcal{L}^g_{\mathcal{V}\mathcal{W}} \cdot \mathcal{L}^f_{\mathcal{U}\mathcal{V}}.$$

Tedy skládání lineárních zobrazení odpovídá násobení odpovídajících matic.

Shrnutí. Lineární zobrazení jsou ve vzájemně jednoznačné korespondenci s maticemi. Tato korepondence se pro libovolně pevně zvolené báze $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ realizuje přiřazením matice přechodu $\mathcal{L}^f_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$ lineárnímu zobrazení f a naopak matici A se přiřadí lineární zobrazení f_A definované předpisem $(f_A(\vec{x}))_{\mathcal{V}} := A \cdot (\vec{x})_{\mathcal{V}}$.

Příklad. Nalezněte matici lineárního zobrazení f z příkladu s obrázkem, v němž se otáčí horizontální složka prostorového vektoru o úhel α a) v kanonické bázi, b) v bázi $\mathcal{U} = (1, 0, 1), (2, 1, 1), (0, 1, 0)$.

a) $\mathcal{L}^f_{\mathcal{E}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Platí $(f(\vec{x}))_{\mathcal{U}} = P_{\mathcal{E}\mathcal{U}} \cdot (f(\vec{x}))_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}\mathcal{U}} \mathcal{L}^f_{\mathcal{E}\mathcal{E}} \cdot (\vec{x})_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}\mathcal{U}} \mathcal{L}^f_{\mathcal{E}\mathcal{E}} (\vec{x})_{\mathcal{E}} P_{\mathcal{U}\mathcal{E}} \cdot (\vec{x})_{\mathcal{U}} = \mathcal{L}^f_{\mathcal{U}\mathcal{U}} \cdot (\vec{x})_{\mathcal{U}}$. Odtud $\mathcal{L}^f_{\mathcal{U}\mathcal{U}} = P_{\mathcal{E}\mathcal{U}} \mathcal{L}^f_{\mathcal{E}\mathcal{E}} P_{\mathcal{U}\mathcal{E}} = P^{-1}_{\mathcal{U}\mathcal{E}} \mathcal{L}^f_{\mathcal{E}\mathcal{E}} P_{\mathcal{U}\mathcal{E}}$, kde $P_{\mathcal{U}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.